

---

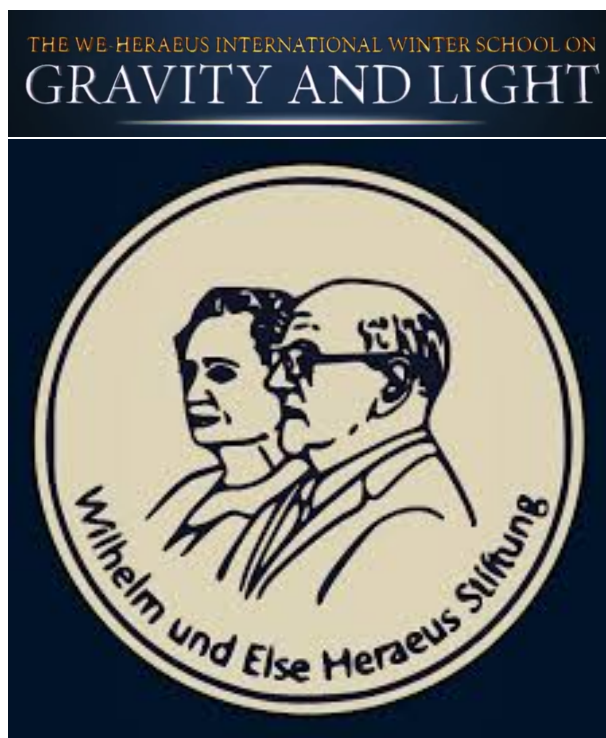
# THE WE-HERAEUS INTERNATIONAL WINTER SCHOOL ON GRAVITY AND LIGHT

---

CURSO IMPARTIDO EN 2015 POR

DR. FREDERIC P. SCHULLER

*Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg,  
Institut für Theoretische Physik III*



NOTAS TRADUCIDAS POR

JON A. GOMEZ

*gomez.jon@gmail.com*

## AGRADECIMIENTOS

Este conjunto de notas tiene por objeto acompañar el curso de conferencias sobre la Relatividad General dictado por el Dr. Frederic P. Schuller. Los vídeos del curso están disponibles en YouTube vía el siguiente enlace:

<https://www.youtube.com/watch?v=7G4SqIboeig&t=3811s>

He intentado corregir algunos errores tipográficos y/o descuidos que he encontrado a lo largo del curso. También he tratado de incluir información adicional que creo soporta bien el material enseñado, que a veces ha resultado en la modificación del orden enseñado. Obviamente, cualquier error incurrido debido a alguno de estos puntos es totalmente mío y no debe reflejarse en manera alguna en el material enseñado.

Quisiera extender un mensaje de agradecimiento al Dr. Schuller por haber puesto a disposición este curso, así como por las magníficas explicaciones del tópico. Para cualquier comentario o aclaración no duden en contactarme a través del e-mail proporcionado en la página del título.

Estas notas están bajo trabajo en progreso, así pues para notas actualizadas, así como para otras notas/trabajos que tengo disponibles, pueden visitar mi blog site

[www.richiedadhley.com](http://www.richiedadhley.com)

Estas notas no están avaladas por el Dr. Schuller o The WE-Heraeus Institute.

Richie Dadhley

**Nota del traductor.** Deseo agradecer al Richie Dadhley por su permiso para traducir estas notas al español, así como por su amable y desinteresada ayuda en LaTeX durante la traducción. A los lectores potenciales les animo a enviarme las sugerencias, correcciones y modificaciones que juzguen oportunas.

*Jon A. Gomez, Ingeniero Industrial-Consultor. EHU/UPV Bilbao (Basque Country)  
Enero, 2022*

# Contenido

<b>0</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Topología</b>	<b>3</b>
1.1	Topología . . . . .	3
1.2	Mapas continuos . . . . .	5
1.3	Composición de Mapas Continuos . . . . .	7
1.4	Heredando una Topología . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Variedades topológicas (Topological Manifolds)</b>	<b>9</b>
2.1	Variedades topológicas . . . . .	9
2.2	Mapas de transición de cartas (Chart Transition Maps) . . . . .	11
2.3	Filosofía de las variedades . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Algebra Multilineal</b>	<b>14</b>
3.1	Espacios vectoriales . . . . .	14
3.2	Mapas lineales . . . . .	16
3.3	Espacio vectorial de Homomorfismos . . . . .	17
3.4	Espacio Vectorial Dual . . . . .	18
3.5	Tensores . . . . .	19
3.6	Vectores y Covectores como Tensores . . . . .	21
3.7	Bases . . . . .	21
3.8	Componentes de Tensores . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Variedades Diferenciales</b>	<b>25</b>
4.1	Estrategia . . . . .	25
4.2	Cartas compatibles . . . . .	26
4.3	Difeomorfismos . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Espacios Tangente</b>	<b>30</b>
5.1	Velocidades . . . . .	30
5.2	Espacio Vectorial Tangente . . . . .	31
5.3	Componentes de un Vector con respecto a una Carta . . . . .	34
5.4	Bases inducidas por Cartas . . . . .	35
5.5	Cambio de los Componentes de un Vector bajo Cambio de Carta . . . . .	36
5.6	Espacios Cotangentes . . . . .	37

5.7	Cambio de Componentes de un Covector Bajo un Cambio de Carta . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Campos</b>	<b>39</b>
6.1	Haces, Fibras y Secciones . . . . .	39
6.2	Haz Tangente de una Variedad Suave . . . . .	40
6.3	Campos Vectoriales . . . . .	43
6.4	El Módulo- $C^\infty(\mathcal{M})$ . . . . .	43
6.5	Campos tensores . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Conexiones</b>	<b>48</b>
7.1	Derivadas Direccionales de Campos Tensores . . . . .	49
7.2	Nueva Estructura en $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ requerida para Fijar $\nabla$ . . . . .	50
7.3	Cambio de $\Gamma$ s Bajo Cambio de Carta . . . . .	53
7.4	Coordenadas normales . . . . .	55
<b>8</b>	<b>Transporte Paralelo &amp; Curvatura</b>	<b>57</b>
8.1	Paralelismo de Campos Vectoriales . . . . .	58
8.2	Curvas Transportadas Autoparalelamente . . . . .	59
8.3	Ecuación autoparalela . . . . .	60
8.4	Torsión . . . . .	62
8.5	Curvatura . . . . .	63
<b>9</b>	<b>El Espacio Newtoniano es Curvo</b>	<b>66</b>
9.1	Pregunta de Laplace . . . . .	67
9.2	La Plena sabiduría de Newton I . . . . .	67
9.2.1	Fuerzas de Marea . . . . .	69
9.3	La Base de la Formulación Geométrica de los Axiomas de Newton . . . . .	70
9.4	Aceleración . . . . .	72
<b>10</b>	<b>Variedades Métricas</b>	<b>74</b>
10.1	Métrica . . . . .	74
10.2	Firma . . . . .	75
10.3	Longitud De Una Curva . . . . .	77
10.4	Geodésicas . . . . .	78
<b>11</b>	<b>Simetría</b>	<b>82</b>
11.1	Mapa de avance ( <i>Push-Forward Map</i> ) . . . . .	82
11.2	Mapa de retroceso ( <i>Pull-back Map</i> ) . . . . .	84
11.3	Métrica inducida . . . . .	85
11.4	Flujo de un Campo Vectorial Completo . . . . .	86
11.5	Subálgebras de Lie del Álgebra de Lie $(\Gamma T\mathcal{M}, [\cdot, \cdot])$ de Campos Vectoriales . . . . .	88
11.6	Simetría . . . . .	90
11.7	Derivadas de Lie . . . . .	90
11.7.1	Campos Vectoriales de Killing . . . . .	92

<b>12 Integración</b>	<b>93</b>
12.1 Repaso de la Integración en $\mathbb{R}^d$	93
12.2 Integración en una Carta	94
12.3 Formas Volumen	95
12.4 Integración En el Dominio de Una Carta	97
12.5 Integración En la Variedad Completa	98
<b>13 Espaciotiempo Relativístico</b>	<b>100</b>
13.1 Orientación Temporal	100
13.2 Observadores	104
13.3 Rol de las Transformaciones de Lorentz	106
<b>14 Materia</b>	<b>108</b>
14.1 Materia Puntual	108
14.1.1 Sin Fuerzas Externas	108
14.1.2 Presencia de Fuerzas Externas	109
14.2 Materia de Campo	109
14.3 Tensor Energía-Momento De Los Campos de Materia	111
<b>15 Gravedad de Einstein</b>	<b>112</b>
15.1 Hilbert	112
15.2 Variación de $S_H$	113
15.3 Solución del problema de $(\nabla_a T)^{ab} = 0$	115
15.4 Variaciones de las Ecuaciones de Campo	115
15.4.1 Expresión escalar de Ricci	115
15.4.2 Constante Cosmológica	116
<b>16 Geometría Óptica I</b>	<b>117</b>
16.1 Principio de Fermat	117
<b>17 Geometría óptica II</b>	<b>119</b>
<b>18 Formulación canónica de GR I</b>	<b>120</b>
<b>19 La formulación canónica de GR II</b>	<b>121</b>
<b>20 Cosmología: La época temprana</b>	<b>122</b>
20.1 Supuesto de homogeneidad espacial& Isotropía a gran escala	122
20.2 Ecuaciones de Einstein	126
20.2.1 Tensor de Ricci	126
20.2.2 Materia	126
20.2.3 Reducción de las Ecuaciones de Einstein	127
20.3 Modelos de Materia Fluida Perfecta	128
20.4 Soluciones	129

<b>21 Cosmología: La época tardía</b>	<b>131</b>
21.1 Parámetros de Densidad	131
21.2 Materia Dominante en Varias Épocas	132
21.3 Un universo tardío más realista	132
<b>22 Agujeros Negros</b>	<b>135</b>
22.1 Geodésicas Radiales Nulas	136
22.2 Eddington-Finkelstein	138
22.3 Kruskal-Szekeres	140
22.4 Otros Tipos De Agujero Negro	142
22.4.1 Horizontes de sucesos & Superficies de Corrimiento al Rojo Infinito	143
22.4.2 Ergoregión	145
22.4.3 Horizontes de Sucesos Múltiples	146
<b>23 Diagramas de Penrose</b>	<b>147</b>
23.1 Receta para construir un diagrama	147
23.2 Minkowski	150
23.3 Otros Espaciotiempo	152
23.3.1 Agujero negro de Schwarzschild	152
23.3.2 Agujero Negro de Kerr	153
23.3.3 Agujero Negro de Reissner-Nordström	155
23.3.4 Agujero Negro de Kerr-Newmann	155
23.3.5 Colapso Gravitacional	156
23.3.6 Universo Isotrópico & Homogéneo	156
<b>24 Teoría de la Perturbación I</b>	<b>159</b>
24.1 Perturbación de Soluciones Exactas	159
24.2 La métrica perturbada	160
24.3 Helmholtz-Hodge	162
24.4 El Precio Pagado Por El Lujo De Trabajar En Una Carta	163
<b>25 Teoría de la Perturbación II</b>	<b>165</b>
25.1 Calcular $\Delta_\xi a$ , $\Delta_\xi c$ , $\Delta_\xi b_\alpha$ & $\Delta_\xi e_{\alpha\beta}$	165
25.2 Perturbaciones Escalares	167
25.3 Perturbaciones Vectoriales	168
25.4 Perturbaciones Tensoriales	168
<b>26 Tutoriales</b>	<b>170</b>
26.1 Topología	170
26.1.1 Topologías En Un Conjunto Simple	170
26.1.2 Funciones Continuas	171
26.1.3 La Topología Estándar En $\mathbb{R}^d$	171
26.2 Variedades Topológicas	172
26.2.1 Un Atlas Desde Un Mundo Real — el río Möbius	172
26.2.2 Un Mundo Real Desde Un Atlas	172
26.2.3 Antes De La Invención De La Rueda	172

26.3	Álgebra Multilineal . . . . .	174
26.3.1	Espacios Vectoriales . . . . .	174
26.3.2	Índices . . . . .	177
26.3.3	Mapas Lineales Como Tensores . . . . .	178
26.4	Variedades Diferenciales . . . . .	179
26.4.1	Restricción Del Atlas . . . . .	179
26.4.2	Cuadrados Suaves ( " <i>Soft Squares</i> " ) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . . . . .	180
26.4.3	Análisis Multi-Dimensional Pregrado . . . . .	181
26.4.4	Diferenciabilidad En Una Variedad . . . . .	181
26.5	Espacios Tangentes . . . . .	181
26.5.1	Uso Virtuoso Del Símbolo $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ . . . . .	181
26.5.2	Transformación De Los Componentes De Un Vector . . . . .	182
26.5.3	El Gradiente . . . . .	183
26.5.4	¿Existe Una Suma De Curvas Bien Definida? . . . . .	184
26.6	Campos . . . . .	186
26.6.1	Campos Vectoriales Para Profesionales . . . . .	186
26.6.2	El Haz Cotangente $T^*\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ . . . . .	187
26.7	Conexiones . . . . .	188
26.7.1	Reglas Prácticas sobre Cómo Actúa $\nabla$ . . . . .	188
26.7.2	Coefficientes de Conexión . . . . .	188
26.8	Transporte Paralelo Y Curvatura . . . . .	190
26.8.1	Donde Aparecen Los Coeficientes De Conexión . . . . .	190
26.8.2	La Esfera Redonda . . . . .	191
26.8.3	Cómo No definir El Transporte Paralelo . . . . .	191
26.11	Variedades Métricas . . . . .	192
26.11.1	Reconocer & Tratar Con Diferentes Firmas . . . . .	192
26.11.2	Conexión Levi-Civita . . . . .	193
26.11.3	Manejando La Función Longitud . . . . .	193
26.11.4	Una Forma Práctica De Determinar Rápidamente Los Símbolos De Christoffel . . . . .	195
26.11.5	Propiedades Del Tensor de Riemann-Christoffel . . . . .	196
26.12	Simetría . . . . .	197
26.12.1	Retroceso y Avance . . . . .	197
26.12.2	Derivada Lie—La Forma Pedestre . . . . .	199
26.13	Integración . . . . .	203
26.13.1	Integrales & Volúmenes . . . . .	203
26.14	Espaciotiempo De Schwarzschild . . . . .	204
26.14.1	Geodésicas En Un Espaciotiempo De Schwarzschild . . . . .	204
26.14.2	Desplazamiento Al Rojo Gravitacional . . . . .	206
26.15	Espaciotiempo Relativista, Materia Y Gravitación . . . . .	208
26.15.1	Ley de la fuerza de Lorentz . . . . .	208
26.15.2	¿Qué Curvatura Puede Aparecer En Las Ecuaciones De Einstein? . . . . .	210
26.20	Cosmología . . . . .	211
26.20.1	Ecuación de Killing . . . . .	211
26.20.2	Edad Del Universo... . . . .	211

26.23Diagramas . . . . . 214

26.23.1 Diagrama de Penrose De Un Universo Lleno De Radiación . . . . . 214

26.24Teoría de la Perturbación . . . . . 217



# 0 | Introducción

Este curso trata de la estructura del espacio y el tiempo con el objetivo final de entender las teorías de la gravedad y la materia relativística. Conectaremos estas dos teorías usando las famosas ecuaciones de Einstein y mostraremos cómo están relacionadas con la curvatura del espaciotiempo. Esto forma en conjunto una introducción inicial a la relatividad general.

Con objeto de estar en disposición incluso de afrontar este tema, tenemos que construir nuestro entendimiento de la noción de espaciotiempo. Es importante que tengamos una comprensión rigurosa de lo que en realidad es el espaciotiempo y no simplemente decir que 'es el espacio y el tiempo puestos juntos'. En su lugar deberíamos construirlo hasta el punto en que podamos entender la siguiente declaración:

El espaciotiempo es una variedad ("manifold") topológica 4-dimensional con un atlas suave que conlleva una conexión libre de torsión compatible con una métrica Lorentziana y una orientación al tiempo.

Ahora bien, sería sorprendente que el lector estuviese completamente familiarizado con el significado de esta sentencia. La primera parte de esta serie de sesiones está dedicada básicamente a clarificar/definir lo que significan los términos de arriba. El descargo de responsabilidad ("disclaimer") que conlleva esto es que la primera parte de este curso será de fuerte contenido matemático y no siempre quedará inmediatamente claro que lo que estamos explicando nos conduzca a la comprensión de la gravedad y la materia. El Dr. Schuller despliega un gran trabajo intentando mantener nuestra mentes en línea con lo que está haciendo, sin embargo, en caso de perder el hilo de cómo todo se va ensamblando, mi consejo es que tengamos confianza en que así será y centrarnos en entender todo el contenido del curso, ya que este entendimiento será vital más adelante .

A modo de breve descripción de cómo vamos a construir y comprender esta declaración, la tabla a continuación nos indica qué sesiones ("lectures") abordarán qué partes de la declaración:

Términos	Sesión
Topológico	1
Variedad 4-Dimensional	2
Atlas suave	4
Conexión	7
Libre de Torsión	8
Métrica Lorentziana	10
Orientación al Tiempo	13
Ecuaciones de Einstein	15

El resto del curso estará dedicado a tratar sobre la interacción entre la materia y la gravedad y a tratar de objetos tales como los agujeros negros.

Existen también tutoriales sobre el curso, que pondré al final de las notas, para no interrumpir el flujo de las mismas. Es muy recomendable que el lector estudie estos tutoriales después de la sesión ("*lecture*") correspondiente.

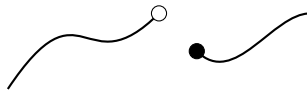
También he incluido ejercicios en las sesiones para que el lector tenga la oportunidad de comprobar que entiende lo que se está explicando. Algunos de ellos ya se dan resueltos en las clases, por lo que pueden servir de comprobación. Lo he hecho sólo en los casos en que la demostración era sencilla. Otros ejercicios están basados en comentarios hechos por el Dr Schuller durante las clases. Igualmente estos ejercicios son de mi propia invención. Le animo al lector a intentarlos todos, y en caso de quedarse atascado, si me envía un e-mail trataré de responderle con alguna pista adicional y/o las soluciones.

Todos los diagramas de estas notas han sido dibujados por mí en Tikz, y si alguien está interesado en usarlos puede enviarme un e-mail. Alternativamente, el código para estas notas está disponible vía [my GitHub](#).

# 1 | Topología

## 1.1 Topología

A su más basto nivel, el espaciotiempo es sólo un *conjunto*. En otras palabras, el espaciotiempo es justo una colección de puntos, conocida como los *elementos* de un conjunto.<sup>1</sup> Sin embargo, esta definición no es suficiente ni para tratar de las nociones más sencillas que explicamos en física clásica, a saber *continuidad de mapas*. Es importante poder hablar de ello y requerir la continuidad de mapas ya que el movimiento de una partícula es dado por un mapa, y está claro que queremos que el mapa sea continuo. Es decir, no queremos que el movimiento de una partícula 'salte' de repente de un punto a otro:



Por eso necesitamos introducir en nuestro conjunto ("set") una nueva estructura que nos permita poder hablar de continuidad. Hay muchas cosas que podríamos introducir para hacer esto, sin embargo tenemos que tener cuidado; no queremos empezar añadiendo propiedades adicionales a nuestro conjunto que más adelante nos van a molestar. Queremos usar la estructura *más débil* que podamos. Y qué es esto? Afortunadamente la respuesta ya es conocida: es la llamada *topología*.

**Definición** (Conjunto Potencia). El **conjunto potencia**  $\mathcal{P}(S)$  (*Power Set*) de un conjunto  $S$  es el conjunto de todos los subconjuntos de  $S$ .

**Definición** (Topología). Sea  $\mathcal{M}$  un conjunto. Una **topología**  $\mathcal{O}$  en  $\mathcal{M}$  es un subconjunto  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$  que cumple:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{O}$  y  $\mathcal{M} \in \mathcal{O}$ .
- (ii) Dado  $U, V \in \mathcal{O}$  entonces  $U \cap V \in \mathcal{O}$ .
- (iii) Sea  $A$  un conjunto de índices arbitrario. Dado  $U_\alpha \in \mathcal{O}$  entonces  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$ .

*Observación 1.1.1.* las condiciones (ii) y (iii) parecen engañosamente similares, pero hay una diferencia importante. La condición (ii) dice que una intersección *finita* de elementos está en  $\mathcal{O}$ , mientras que la (iii) dice que una unión *arbitraria* de elementos está en  $\mathcal{O}$ .

<sup>1</sup>Aquí podríamos introducir una breve sección sobre la teoría de conjuntos. Esta nota es sólo para recordarme que lo tenga en cuenta.

Ejemplo 1.1.2. Sea  $\mathcal{M} = \{1, 2, 3\}$ . Entonces podríamos elegir para definir

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &:= \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\} \\ \mathcal{O}_2 &:= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\} \\ \mathcal{O}_3 &:= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.\end{aligned}$$

La pregunta es, cuáles son topologías en  $\mathcal{M}$ ? Una rápida comprobación muestra que  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_3$  sí son, pero  $\mathcal{O}_2$  no lo es ya que  $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{O}_2$ .

Entonces vemos que, dado el conjunto  $\mathcal{M}$  es más bien fácil calcular si algo es topología (aunque quizá un poco aburrido). Lo que no conocemos es la forma de  $\mathcal{M}$ , aun así podemos definir las topologías específicas? La respuesta es sí y el ejemplo nos lo muestra.

**Definición** (Topología caótica). Sea  $\mathcal{M}$  un conjunto. La topología **caótica** en  $\mathcal{M}$  se define como

$$\mathcal{O}_{\text{caótica}} := \{\emptyset, \mathcal{M}\}.$$

**Definición** (Topología discreta). Sea  $\mathcal{M}$  un conjunto. la topología **discreta** en  $\mathcal{M}$  se define como

$$\mathcal{O}_{\text{discreta}} := \mathcal{P}(\mathcal{M}).$$

Así en el Ejemplo 1.1.2,  $\mathcal{O}_1$  es la topología caótica y  $\mathcal{O}_3$  la discreta. Sin embargo, ambas la topología caótica y a discreta son absolutamente inútiles, son simplemente los casos extremos de topologías con la mínima cantidad y la máxima de elementos, respectivamente. Sin embargo, en  $\mathbb{R}^d = \{(p_1, \dots, p_d) | p_i \in \mathbb{R}\}$  hay una topología muy importante que usaremos en estas notas.

**Definición** (Topología estándar en  $\mathbb{R}^d$ ). Sea  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ . La topología **estándar** en  $\mathcal{M}$  se define como

$$\mathcal{O}_s := \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) | \forall p \in U \exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq U\},$$

donde

$$B_r(p) := \left\{ (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d (q_i - p_i)^2 < r^2 \right\}$$

se denomina una *soft-ball* (*bola suave*) de radio  $r$  alrededor de  $p$ , también conocida como la vecindad de  $p$  con radio  $r$ .

#### Ejercicio

Demostrar que la topología estándar es de hecho una topología, es decir mostrar que cumple las condiciones (i), (ii) y (iii).

Observación 1.1.3. Los familiarizados con las estructuras de espacios vectoriales y con espacios normados, pueden estar tentados de decir 'Ah! la "*soft-ball*" es justamente la norma euclídea. Sin embargo, la definición anterior no necesita una estructura completa de espacio vectorial (que una norma sí necesita) para que se mantenga. Todo lo que necesitamos es que sabemos lo que  $(q_i - p_i)^2$  significa.

**Definición** (Espacio topológico). Sea  $\mathcal{M}$  un conjunto y sea  $\mathcal{O}$  una topología en  $\mathcal{M}$ . Al doblete  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  lo llamamos un **espacio topológico**.

*Observación 1.1.4.* En estas notas si hablamos de  $\mathbb{R}^d$  como un espacio topológico (por ejemplo cuando decimos que un mapa es continuo, ver abajo); si no se dota de una topología específica asumiremos que lo equipamos con la topología estándar.

*Observación 1.1.5.* En este curso de conferencias puede que no siempre escribamos una topología y simplemente llamemos  $\mathcal{M}$  a una variedad topológica ("manifold"). Obviamente si decimos eso, siempre hay un  $\mathcal{O}$  invisible recordándolo, sólo queremos ahorrar en texto. Sin embargo, debemos tratar siempre de ser explícitos para evitar confusiones.

Intuitivamente podemos pensar en la topología estándar en  $\mathbb{R}^d$  como formas que no incluyen sus límites y la "soft-ball" como un círculo<sup>2</sup> de radio  $r$  que no contiene el perímetro. Con esta intuición vemos fácilmente la extensión de la topología estándar a las topologías generales: son los conjuntos de los *conjuntos abiertos* dentro de ese conjunto. De hecho funciona también en el sentido inverso, usamos una topología para definir lo que entendemos por un conjunto abierto.

**Definición** (Conjunto abierto ("Open set")). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  un espacio topológico. Llamamos a  $U \subseteq \mathcal{M}$  un **conjunto abierto** si y sólo si  $U \in \mathcal{O}$ .

**Definición** (Conjunto cerrado ("Close set")). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  un espacio topológico. Llamamos a  $V \subseteq \mathcal{M}$  un **conjunto cerrado** si y sólo si  $\mathcal{M} \setminus V \in \mathcal{O}$ , donde  $\mathcal{M} \setminus V$  es conocido como el *complemento* de  $V$ .

*Observación 1.1.6.* Puede haber tendencia a pensar que un conjunto cerrado es un conjunto que no es abierto. Sin embargo, esto no es cierto. De hecho un conjunto puede ser

- (i) Abierto y o cerrado, p.ej.  $(0, 1)$  in  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_s)$ ,
- (ii) No abierto y cerrado, p.ej.  $[0, 1]$  in  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_s)$ ,
- (iii) Abierto y cerrado, p.ej.  $\emptyset$  en cualquier espacio topológico,
- (iv) No abierto y no cerrado, p.ej.  $[0, 1)$  in  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_s)$ .

#### Ejercicio

Mostrar que los ejemplos dados arriba son correctos.

## 1.2 Mapas continuos

Recordemos primero la terminología/notación de un mapa. Decimos que  $f$  es un mapa desde un conjunto  $\mathcal{M}$ , conocido como el *dominio*, a otro conjunto  $\mathcal{N}$ , conocido como el *objetivo*, y lo escribimos como  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ . Decimos que el elemento  $m \in \mathcal{M}$  es mapeado a  $n \in \mathcal{N}$ , lo cual escribimos como  $f : m \mapsto n$ . Un mapa llevará *cada* elemento de su dominio a *algún*

<sup>2</sup>En  $\mathbb{R}^2$  al menos. En valores mayores de  $d$  se toma simplemente el dimensional equivalente a un círculo, por ej., una bola en 3D.

elemento en su objetivo. Es posible que dos elementos del dominio sean mapeados al mismo elemento del objetivo y no se requiere que cada elemento del objetivo sea alcanzado. Basado en esto tenemos las siguientes definiciones.

**Definición** (Mapa inyectivo). Se dice que un mapa  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es **inyectivo** si es uno-a-uno (*one-to-one*). Es decir

$$f(m_1) = f(m_2) \iff m_1 = m_2 \quad \forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}.$$

**Definición** (Mapa suryectivo). Se dice que un mapa  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es **suryectivo** si es alcanzado cada elemento del objetivo. Es decir

$$\forall n \in \mathcal{N} \quad \exists m \in \mathcal{M} : f(m) = n.$$

**Definición** (Mapa biyectivo). Un mapa  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es denominado **biyectivo** si es a la vez inyectivo y suryectivo.

La respuesta a si un mapa  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es *continuo* depende, *por definición*, en la elección de las topologías escogidas en los conjuntos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ .

**Definición** (Mapa continuo). Sean  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$  y  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}})$  espacios topológicos. Un mapa  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es denominado **continuo** con respecto a  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$  and  $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$  si y sólo si

$$\forall V \in \mathcal{O}_{\mathcal{N}}, \quad \text{preim}_f(V) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}},$$

donde

$$\text{preim}_f(V) := \{m \in \mathcal{M} \mid f(m) \in V\}.$$

Es decir "las preimágenes de conjuntos abiertos en  $\mathcal{N}$  son abiertas en  $\mathcal{M}$ ".

Observación 1.2.1. Nótese que la preimagen de un mapa  $f$  *no* es lo mismo que su inverso. Por ejemplo, no podemos definir un inverso para un mapa no inyectivo; si dos elementos en el mapa dominio van al mismo elemento en el mapa objetivo, no hay manera clara para decidir qué elemento obtenemos bajo el mapa inverso. Sin embargo en ese caso la preimagen es la colección de ambos puntos. O sea que la continuidad no requiere que el mapa sea inyectivo. Nótese igualmente que la sobreyectividad no es requerida ya que cualquier elemento que no haya sido alcanzado tiene preimagen  $\emptyset \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ .

Observación 1.2.2. Notar que si elegimos la topología en  $\mathcal{M}$  como topología discreta entonces *cada* mapa  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es continuo. Esto puede verse fácilmente porque la preimagen de cualquier conjunto en  $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$  es o bien un subconjunto de  $\mathcal{M}$  o es el conjunto vacío ( "*empty set*" ), y ambos están en la topología discreta en  $\mathcal{M}$ .

**Definición** (Homeomorfismo). Sea  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un mapa biyectivo. Se dice entonces que el mapa es un **homeomorfismo** si ambos  $f$  y su inversa  $f^{-1}$  son continuos. Son los mapas de topología *que preservan la estructura* ("*structure-preserving*")<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>En otras palabras, son los *isomorfismos* topológicos

Ejemplo 1.2.3. Sea  $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \{1, 2\}$  y sea  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  dado por

$$f(1) = 2 \quad \text{y} \quad f(2) = 1.$$

Ahora definimos

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_{\mathcal{N}} := \{\emptyset, \{1, 2\}\}.$$

- (a) Para comprobar si  $f$  es continuo con respecto a  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$  y  $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$  necesitamos comprobar que las preimágenes de conjuntos abiertos en  $\mathcal{N}$  son conjuntos abiertos en  $\mathcal{M}$ .

$$\begin{aligned} \text{preim}_f(\emptyset) &= \emptyset \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \\ \text{preim}_f(\{1, 2\}) &= \mathcal{M} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

y entonces  $f$  es continua.

- (b) Veamos con respecto al mapa inverso  $f^{-1}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ . En efecto cumple

$$f^{-1}(1) = 2 \quad \text{y} \quad f^{-1}(2) = 1,$$

sin embargo tenemos

$$\text{preim}_{f^{-1}}(\{1\}) = \{2\}, \quad \text{y} \quad \text{preim}_{f^{-1}}(\{2\}) = \{1\},$$

ninguno de los cuales está en  $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ , por lo que este mapa no es continuo.

### 1.3 Composición de Mapas Continuos

**Definición** (Composición de mapas). Dados dos mapas  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  y  $g: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ , podemos definir su **composición** como un nuevo mapa

$$g \circ f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$$

donde  $(g \circ f)(m) := g(f(m))$ .

**Teorema 1.3.1.** Sea  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  y  $g: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$  dos mapas continuos con respecto a las topologías relevantes. Entonces el mapa de composición  $g \circ f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$  también es continuo.

*Proof.* Sea  $V \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ . Ahora tenemos

$$\begin{aligned} \text{preim}_{g \circ f}(V) &:= \{m \in \mathcal{M} \mid (g \circ f)(m) \in V\} \\ &= \{m \in \mathcal{M} \mid f(m) \in \text{preim}_g(V) \in \mathcal{O}_{\mathcal{N}}\} \\ &= \text{preim}_f(\text{preim}_g(V)) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

donde la segunda línea proviene de la continuidad de  $g$  y la última línea de la continuidad de  $f$ . □

#### Ejercicio

Mostrar que el Teorema 1.3.1 abarca la composición de número arbitrario de mapas continuos.

### 1.4 Heredando una Topología

Así pues, ya sabemos cómo definir una topología en un conjunto  $\mathcal{M}$ . Ahora hacemos esta pregunta: dado otro conjunto  $S$ , es posible usar la topología en  $\mathcal{M}$  para definir una en  $S$ ? La respuesta obviamente es sí<sup>4</sup> y es conocida como *topología heredada* ("inherited topology"). El cómo hacerlo obviamente depende de la situación. La forma de hacerlo que es importante para la física del espaciotiempo es la siguiente:

**Definición.** Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$  un espacio topológico y sea  $S \subset \mathcal{M}$ . Definimos la **topología del subconjunto** como

$$\mathcal{O}|_S := \{U \cap S \mid U \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}\}.$$

*Proof.* queremos probar que la topología subconjunto es de hecho una topología, es decir, tenemos que comprobar que cumple las tres condiciones.

- (i) tenemos  $\emptyset = \emptyset \cap S$  y  $\emptyset \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$  que nos dice que  $\emptyset \in \mathcal{O}|_S$ . Igualmente tenemos  $S = \mathcal{M} \cap S$  y  $\mathcal{M} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$  y entonces  $S \in \mathcal{O}|_S$ .
- (ii) Sea  $A, B \in \mathcal{O}|_S$ , entonces sabemos que existe  $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$  tal que  $A = \tilde{A} \cap S$  y  $B = \tilde{B} \cap S$ . De lo cual tenemos que  $A \cap B = (\tilde{A} \cap S) \cap (\tilde{B} \cap S) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap S$ . Finalmente usando  $\tilde{A} \cap \tilde{B} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$  tenemos  $A \cap B \in \mathcal{O}|_S$ .
- (iii) Sea  $U_{\alpha} \in \mathcal{O}|_S$ , que nos indica que existe  $\tilde{U}_{\alpha} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$  tal que  $U_{\alpha} = \tilde{U}_{\alpha} \cap S$ . Como arriba esto nos dice que  $\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} = \left(\bigcup_{\alpha \in A} \tilde{U}_{\alpha}\right) \cap S$  donde  $A$  es un índice arbitrario de conjunto. Finalmente usando  $\bigcup_{\alpha \in A} \tilde{U}_{\alpha} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$  obtenemos  $\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} \in \mathcal{O}|_S$ .

□

Podríamos preguntarnos por qué elegiríamos definir un mapa como ese en la tierra; la respuesta tiene que ver con la continuidad de mapas.

Afirmación 1.4.1. Supongamos que tenemos un mapa continuo  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  entre los espacios topológicos  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$  y  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}})$ . Entonces, si tenemos un subconjunto  $S \subset \mathcal{M}$  que lo convertimos en espacio topológico con la topología subconjunto  $(S, \mathcal{O}|_S)$ , tenemos garantizado que el mapa restringido  $f|_S : S \rightarrow \mathcal{N}$  es también continuo con respecto a  $\mathcal{O}|_S$  y  $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ .

#### Ejercicio

Comprobar la Afirmación 1.4.1.

<sup>4</sup>De lo contrario el título de esta sección parecería tonto.



## 2 | Variedades topológicas (Topological Manifolds)

Es un hecho de vida<sup>1</sup> que existen tantos espacios topológicos diferentes que los matemáticos ni siquiera pueden clasificarlos<sup>2</sup>. En otras palabras, no existe un conjunto tal de nociones topológicas conocidas que nos permitan averiguar si dos espacios son homeomorfos simplemente 'marcando' si dos espacios tienen o no esas nociones.

Para la física clásica del espaciotiempo<sup>3</sup>, nos podemos centrar en espacios topológicos  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$  que pueden ser *charted* ("Cartografiados"), de forma análoga a cómo la superficie de la tierra es cartografiada en un atlas.

### 2.1 Variedades topológicas

**Definición.** Designemos como  $U_p$  un vecindario abierto que contiene el punto  $p$  en un espacio topológico. Un espacio topológico  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  es denominado una **variedad topológica  $d$ -dimensional** si

$$\forall p \in \mathcal{M} \exists U_p \in \mathcal{O} : \exists x : U_p \rightarrow x(U_p) \subseteq \mathbb{R}^d$$

tal que

- (i)  $x$  es *invertible*:  $x^{-1} : x(U_p) \rightarrow U_p$ ,
- (ii)  $x$  es *continuo*,<sup>4</sup>
- (iii)  $x^{-1}$  es *continuo*.

Observación 2.1.1. Nota, por la requerida continuidad de  $x$  y su inversa, vemos que la imagen  $x(U_p)$  debe ser abierta con respecto a la topología estándar en  $\mathbb{R}^d$ .

Ejemplo 2.1.2. Sea  $\mathcal{M}$  la superficie de un toro. Esto es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , y por lo tanto podemos heredar la topología subconjunto ("*subset topology*") a partir de la topología estándar en  $\mathbb{R}^3$ . Esto es un ejemplo de una variedad topológica 2-dimensional. Podemos verlo tomando un vecindario abierto en el toro, que es precisamente una forma cerrada sin límites en la superficie, y mapeamos todos sus puntos a un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$  (ver diagrama a continuación). Pensando y trabajando un poco podemos convencernos de que este mapa será

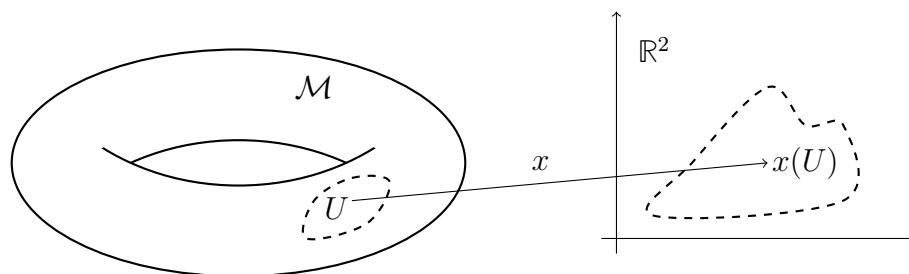
<sup>1</sup>O de matemáticas, para no ser tan dramático.

<sup>2</sup>En el sentido en que se pueden clasificar todos los grupos Lie.

<sup>3</sup>Como en la mecánica cuántica. Obviamente estamos hablando de física relativística.

<sup>4</sup>Usamos la topología estándar en  $\mathbb{R}^d$ .

inyectivo (y por lo tanto invertible), el mapa inverso es sobreyectivo (de manera que todo el toro se mapee) y continuo en ambas direcciones.



Esta es exactamente la misma idea que cuando cartografiamos la superficie de la tierra para hacer mapas de carreteras y atlas.

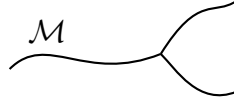
Observación 2.1.3. Podría pensarse que una variedad topológica es homeomorfa <sup>5</sup> a  $\mathbb{R}^d$  dada la explicación en el ejemplo previo. Sin embargo, esto no es cierto porque nuestro mapa es sobreyectivo a un *subconjunto* de  $\mathbb{R}^d$ , no al conjunto completo. Por tanto la declaración correcta es que una variedad topológica es homeomorfa a algún subconjunto particular de  $\mathbb{R}^d$ .

Es importante notar que los valores en la carta o mapa (*chart*) (es decir, las coordenadas en  $\mathbb{R}^2$  arriba) no tienen ningún significado físico en absoluto. Simplemente sirven como una forma de comparar las posiciones de las cosas en el mundo real. El significado físico está en la superficie del toro. Para clarificar, si la base de la torre Eiffel estuviese en el punto  $p \in \mathcal{M}$  y lo hemos mapeado, digamos, a las coordenadas  $(x_1(p), x_2(p)) = (1, 2)$ , los valores 1 y 2 no significan nada *físico*, simplemente nos dicen *en este mapa* que la posición de la base de la torre Eiffel es  $(1, 2)$ . Por supuesto, si cogiéramos un mapa diferente (por ejemplo, rotando nuestro mapa 90 grados) estas coordenadas cambiarían a un nuevo valor, sin embargo la torre Eiffel no se vería en absoluto afectada por esto.

Ejemplo 2.1.4. Sea  $\mathcal{M}$  un lazo de alambre. Imaginamos de nuevo que está en  $\mathbb{R}^3$  y que hereda la topología subconjunto a partir de la topología estándar. Siguiendo la misma idea del ejemplo anterior, vemos que es una variedad topológica 1-dimensional.

Ejemplo 2.1.5. Consideremos ahora el siguiente diagrama

<sup>5</sup>Es decir, existe un mapa biyectivo que es continuo y también el inverso.



De nuevo es claramente un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  (o incluso  $\mathbb{R}^2$  si lo vemos como plano en la página) y por tanto podemos heredar una topología en él. Sin embargo este espacio topológico no es una variedad topológica debido al punto de bifurcación. Este punto nos impide definirlo como un mapa/ carta invertible en ambos sentidos..

Terminología. • El par  $(U, x)$  es denominado un **gráfico ("chart")** of  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ .

- El conjunto  $\mathcal{A} = \{(U_{(\alpha)}, x_{(\alpha)}) \mid \alpha \in A\}$ , para un índice arbitrario conjunto  $A$ , es llamado un **atlas** de  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  si  $\bigcup_{\alpha \in A} U_{(\alpha)} = \mathcal{M}$ .
- $x : U \rightarrow x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$  es llamado un **mapa gráfico o mapa carta (chart map)** definido por  $x(p) = (x^1(p), \dots, x^d(p))$ , donde  $x^i(p)$  es la  $i$ -ésima coordenada de  $p$  con respecto al gráfico o carta elegido  $(U, x)$ .
- $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  son llamados los **mapas coordenados**.

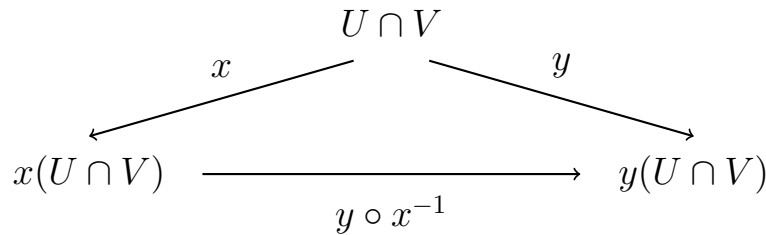
**Definición** (Atlas Máximo (*Maximal Atlas*)). Al atlas que contiene todos las cartas posibles para una variedad topológica se le llama **atlas máximo**.

## 2.2 Mapas de transición de cartas (Chart Transition Maps)

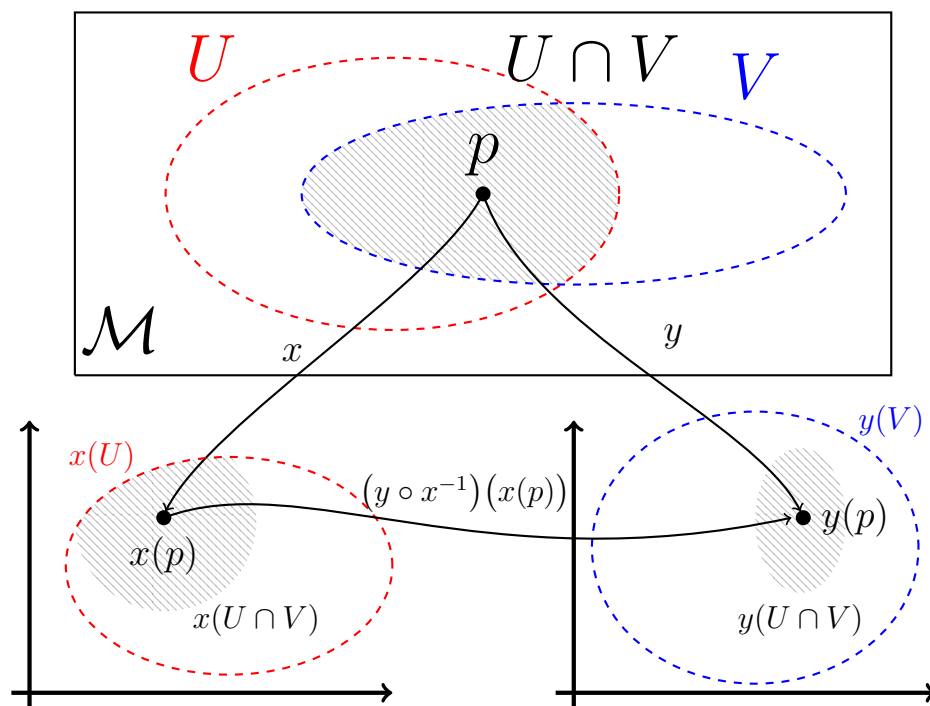
Como lo sugiere el nombre, un mapa de transición de cartas (*usaremos este término en adelante*) es algo dependiente de una carta y por lo tanto no tiene ningún significado físico. Si embargo son sumamente útiles (especialmente para los físicos) y por eso los vamos a estudiar.

Imaginemos dos cartas  $(U, x)$  y  $(V, y)$  para el mismo espacio topológico  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  con regiones solapadas, es decir  $U \cap V \neq \emptyset$ . Un punto en esta región solapada puede ser mapeado por ambas (funciones)  $x$  e  $y$  a sus respectivos parches de  $\mathbb{R}^d$ . Podemos ir entre estas dos cartas representativas del punto usando los **mapas de transición de cartas**. Por ejemplo, si queremos ir de la carta  $(U, x)$  a  $(V, y)$  usamos el mapa de transición de cartas  $(y \circ x^{-1}) : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$  (Figura 2.1).

Podemos dibujar esta idea en términos de mapas como sigue:



Informalmente, los mapas de transición de cartas contienen la información relativa a cómo 'pegar juntas' las páginas de un atlas. Es decir, dadas 10 páginas de un atlas, cada una de



**Figura 2.1:** Representaciones de las cartas  $(U, x)$  y  $(V, y)$  con un solape no-vacío. La región de solape (sombreada)  $U \cap V$  está mapeada por ambas  $x$  y  $y$  a sus respectivas representaciones. Un mapa de transición de cartas  $y \circ x^{-1}$  puede ser usado para mapear la región de solape desde una representación a la otra. El mapa de transición de cartas es continuo ya que es la composición de dos mapas continuos.

las cuales solapa con las otras dos, los mapas de transición de cartas nos dicen en qué orden hay que ponerlas juntas de manera a obtener el orden geográfico correcto<sup>6</sup>.

### 2.3 Filosofía de las variedades

A menudo es deseable (o de hecho la única manera) para definir propiedades (p.ej. continuidad) de objetos reales (p.ej. la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ ) juzgando las condiciones adecuadas, hacerlo no en el propio objeto del mundo real sino en una carta representativa/ imagen de ese objeto del mundo real. La ventaja principal de hacer esto es que podemos usar el "análisis de pregrado" (*undergraduate analysis*) (Nota del traductor: usaremos el término "pregrado" para referirnos al nivel de estudios de los primeros cursos de grado) para estudiar esas propiedades. Por ejemplo, si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  es la trayectoria de una partícula en el mundo real, podemos averiguar si el camino es continuo preguntando si el mapa compuesto  $(x \circ \gamma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  es continuo, usando el concepto de pregrado de continuidad de ese mapa.

Veremos, sin embargo, que debemos tener cuidado al hacer esto. Sólo porque un objeto del mundo real tenga un cierto comportamiento pregrado en *cierta* carta, no quiere decir que

<sup>6</sup>Mediante lo cual obviamente queremos decir que la página 3 sigue a la página 2 de la misma manera que la página 2 sigue a la página 1.

el objeto del mundo real también lo tiene. Lo que en realidad necesitamos es que podamos formar un atlas tal que en *cada* carta la representación del objeto tenga la propiedad deseada. Veremos en la próxima sesión (*lecture*), que esto puede ser imaginado como la idea que queremos: que los mapas de transición de cartas tengan también la deseada propiedad pregrado, y que esa idea se mantenga bajo la composición de cartas. Lo que estamos diciendo aquí es que la propiedad del objeto del mundo real no puede depender de cómo lo imaginemos dibujado en una hoja de papel. Es una propiedad *independiente de la carta* ("chart").

### Ejercicio

Mostrar que el concepto sacado de continuidad pregrado corresponde a la definición dada antes de un mapa continuo. Es decir, si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  es un camino en nuestra variedad, mostrar que si sabemos que todos los mapas representativos de cartas  $(x \circ \gamma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  son continuos pregrado (*undergraduate continuous*), podemos concluir que la imagen de conjuntos abiertos en  $\mathcal{M}$  bajo  $\gamma$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}$ .

*Pista: Usar Teorema 1.3.1 junto con la definición de una variedad topológica.*

## 3 | Algebra Multilineal

El álgebra multilineal, como su nombre indica, no es más que una extensión del álgebra lineal. Al estudiar álgebra lineal, invariablemente se estudian estructuras de espacios vectoriales. Queremos enfatizar que *no* equiparemos espaciotiempo con una estructura de espacio vectorial. Decir esto puede parecer extraño, pero en tal caso preguntémosnos: "¿dónde está  $5 \times \text{París}$ ?" o "¿dónde se encuentra París + Viena?" Sin embargo, los llamados *espacios tangentes*  $T_p\mathcal{M}$  a variedades suaves<sup>1</sup> llevará una estructura de espacio vectorial natural.

Estudiar espacios vectoriales de forma abstracta es beneficioso por dos razones

- (i) Para la construcción de  $T_p\mathcal{M}$ , se necesita un espacio vectorial intermedio  $C^\infty(\mathcal{M})$ , y
- (ii) Las técnicas de Tensores se entienden mucho mejor en un entorno abstracto.

### 3.1 Espacios vectoriales

Para definir un espacio vectorial, primero tenemos que estar seguros de que sabemos lo que es un *campo* (*field*).<sup>2</sup>

**Definición** (Grupo Abeliano). Sea  $K$  un conjunto y sea  $\bullet : K \rightarrow K$ . El doblete  $(K, \bullet)$  es un **Grupo Abeliano** **Abelian Group** (o conmutativo) si se satisfacen los siguientes axiomas

- (i) Conmutativo;  $a \bullet b = b \bullet a$ ,
- (ii) Asociativo;  $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ ,
- (iii) Elemento neutro;  $\exists 0 \in K$  tal que  $a \bullet 0 = 0 \bullet a = a$ ,
- (iv) Inverso;  $\exists a^{-1} \in K$  tal que  $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = 0$ .

*Ejemplo 3.1.1.* Los números reales equipados con adición forman un grupo Abeliano. Sin embargo, los números reales *no* forman un grupo Abeliano cuando están equipados con multiplicación. Esto es porque el elemento neutro es claramente  $1 \in \mathbb{R}$ , pero  $0 \in \mathbb{R}$  y no existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $a \times 0 = 1$ .<sup>3</sup>

**Definición** (Campo). Un **campo** es una tripleta  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  donde

<sup>1</sup>El significado estricto de estos términos se explicará en el curso.

<sup>2</sup>Hay mucha más información sobre este tema en la Sesión del Dr Schuller sobre Anatomía Geométrica de Física Teórica.

<sup>3</sup>Infinito no se cuenta como un elemento bien definido de los reales.

- $\mathbb{F}$  es un conjunto, y
- $+, \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  son mapas.

Deben satisfacer los siguientes axiomas

- (i)  $(\mathbb{F}, +)$  es un grupo Abelian.
- (ii)  $(\mathbb{F}^*, \cdot)$  es un grupo Abelian, donde  $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ .
- (iii) Distributivo;  $\forall a, b, c \in \mathbb{F} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

Observación 3.1.2. Si no exigimos la condición (ii) de arriba, pero en su lugar requerimos solo la condición asociativa,  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ , entonces obtenemos un concepto más débil llamado *anillo (ring)*. Si requerimos también la existencia de un elemento neutro  $1 \in \mathbb{F}$  obtenemos entonces un *anillo unitario (unital ring)*. De forma similar, si requerimos la condición conmutativa obtenemos un *anillo conmutativo*. Veremos más adelante en el curso el uso de los anillos (principio de la sesión 6).

**Definición** ( $\mathbb{F}$ -Espacio Vectorial). Un  $\mathbb{F}$ -espacio vectorial es la tripleta  $(V, +, \cdot)$  donde

- $V$  es un conjunto,
- $+$  es el mapa de adición,  $+: V \times V \rightarrow V$ , y
- $\cdot$  es el mapa s-multiplicación,  $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ ,

satisfaciendo, para todo  $v, w, u \in V$  and  $a, b \in \mathbb{F}$

- (i) Conmutativo con respecto a  $+$ ;  $v + w = w + v$ ,
- (ii) Asociativo con respecto a  $+$ ;  $(v + w) + u = v + (w + u)$ ,
- (iii) Hay un elemento neutro con respecto a  $+$ ;  $\exists e \in V$  tal que  $v + e = v$ ,
- (iv) Hay un elemento inverso con respecto a  $+$ ;  $\exists \tilde{v} \in V$  tal que  $\tilde{v} + v = v + \tilde{v} = e$ .
- (v) Asociativo con respecto a  $\cdot$ ;  $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$ ,
- (vi) Distributivo 1;  $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ ,
- (vii) Distributivo 2;  $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$ ,
- (viii) Unitario con respecto a  $\cdot$ ;  $1 \cdot v = v$ .

En estas notas sólo consideramos espacios vectoriales  $\mathbb{R}$ , y así mismo la mayoría de las definiciones que siguen usarán  $\mathbb{R}$  como el campo. Obviamente podríamos extender estas definiciones a espacios vectoriales  $\mathbb{F}$  generales.

Observación 3.1.3. En realidad debemos tener cuidado en la definición anterior cuando escribimos  $+$  y  $\cdot$ . Hay dos clases respecto a estos signos. Una es la  $+/\cdot$  que definimos para nuestro espacio vectorial, y la otra es la  $+/\cdot$  en  $\mathbb{F}$ . Por ejemplo en (vi) tenemos  $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ . Los signos en negro  $+$  aquí son los definidos para el espacio vectorial, mientras que el rojo es la adición en  $\mathbb{F}$ . La misma idea aplica para la condición (v). Si estuviéramos siendo realmente concretos, les daríamos nombres diferentes, sin embargo simplemente asumiremos que lo podemos resolver en razón del contexto (es decir, ambos  $a$  y  $b$  son números reales por lo que  $a + b$  es claramente la adición en  $\mathbb{F}$ .)

Observación 3.1.4. De la misma manera que podemos construir un espacio vectorial  $\mathbb{F}$  sobre un campo  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ , podemos construir un así llamado modulo  $R$  sobre un anillo  $(R, +, \cdot)$ . Se hace exactamente de la misma forma.

Terminología. Un elemento de un espacio vectorial es a menudo denominado *informalmente* un vector.

Enfatizamos la palabra "informalmente" en la terminología anterior, por la razón que se demuestra en el próximo ejemplo.

Ejemplo 3.1.5. Primero definimos el *conjunto*

$$P := \left\{ p : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{n=1}^N p_n x^n, p_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Entonces podríamos preguntar si  $\square : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $\square(x) = x^2$  es un vector? La respuesta es no, por supuesto que 'no!' Por qué? Porque ni siquiera tenemos un espacio vectorial no podemos por tanto tener vectores. Es decir, no hemos definido y una adición y una multiplicación-s para  $P$ .

Imaginemos ahora que definimos una adición y una multiplicación-s *puntual*, que significa que

$$+ : (p, q) \mapsto p +_P q$$

esta definido mediante

$$(p +_P q)(x) := p(x) +_{\mathbb{R}} q(x),$$

y de manera similar para  $\cdot_P : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , donde los subscritos indican de qué  $+$  estamos hablando. Si *ahora* preguntamos si  $\square$  es un vector, la respuesta es 'efectivamente, sí!'

El punto en el ejemplo de arriba es demostrar que no podemos simplemente mirar a algo en sí mismo y decidir si es un vector o no, necesitamos saber si hay un espacio subyacente o no. Esto podría parecer más bien un punto pedante a probar, sin embargo es un punto importante a destacar porque la gente a menudo pregunta 'qué *es* un tensor?' Un tensor es una extensión de un vector<sup>4</sup> y por eso se definen como elementos de un espacio tensorial, el cual en sí es más bien un objeto abstracto. Esto conduce a veces a gran confusión en la gente, sin embargo una vez entendido el punto de arriba, la confusión debería desaparecer.

### Ejercicio

Probar que  $(P, +_P, \cdot_P)$  tal como se ha definido en el ejemplo de arriba es de hecho un espacio vectorial, o sea mostrar que cumple los 8 axiomas.

## 3.2 Mapas lineales

Es un procedimiento estándar en matemáticas que, una vez hemos introducido una nueva estructura en un objeto, se tengan en cuenta los mapas de preservación de la estructura

<sup>4</sup>O quizás más correctamente, un vector es un tipo específico de tensor.



("structure preserving maps"). Es decir los mapas que mapean dos objetos con los mismos tipos de estructuras, que tienen la propiedad de que la estructura en uno puede ser derivada de la estructura en el otro. Tales mapas son generalmente conocidos como *isomorfismos* de la estructura(s) relevante(s). Ya hemos hecho esto antes al considerar los espacios topológicos: considerábamos los homeomorfismos entre dos espacios topológicos. Como hemos podido reconstruir, los mapas preservadores de estructura para los espacios topológicos son conocidos como *mapas lineales*.

**Definición** (Mapas lineales). Sean  $(V, +_V, \cdot_V)$  y  $(W, +_W, \cdot_W)$  espacios vectoriales. Entonces un mapa  $\varphi : V \rightarrow W$  es denominado **lineal** si: para todo  $v, \tilde{v} \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

- (i)  $\varphi(v +_V \tilde{v}) = \varphi(v) +_W \varphi(\tilde{v})$ , y
- (ii)  $\varphi(\lambda \cdot_V v) = \lambda \cdot_W \varphi(v)$ .

*Ejemplo 3.2.1.* Consideremos de nuevo el espacio  $P$  tal como lo hemos definido en el Ejemplo 3.1.5. Consideremos el mapa  $\delta : P \rightarrow P$  definido por  $\delta(p) := p'$ , o sea el operador diferencial. Esto es un mapa lineal ya que

$$\begin{aligned}\delta(p + q) &= (p + q)' = p' + q' = \delta(p) + \delta(q), & y \\ \delta(\lambda \cdot p) &= (\lambda \cdot p)' = \lambda \cdot p' = \lambda \cdot \delta(p).\end{aligned}$$

*Notación.* Escribimos un mapa lineal  $\varphi : V \rightarrow W$  poniendo una tilde en la flecha, así  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ .

**Teorema 3.2.2** (Composición de mapas lineales). *Supongamos que tenemos los siguientes mapas lineales  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  y  $\psi : W \xrightarrow{\sim} U$ . Entonces el mapa  $(\psi \circ \varphi) : V \xrightarrow{\sim} U$  también es lineal.*

#### Ejercicio

Probar el Teorema 3.2.2 y mostrar que se mantiene para composiciones arbitrarias.

*Ejemplo 3.2.3.* Sea  $\delta : P \xrightarrow{\sim} P$  el mismo mapa anterior. Consideremos ahora el mapa compuesto  $\delta \circ \delta$ , el operador derivada segunda. Entonces el Teorema 3.2.2 junto con el ejemplo anterior nos dice que este es también un mapa lineal  $(\delta \circ \delta) : P \xrightarrow{\sim} P$

### 3.3 Espacio vectorial de Homomorfismos

**Definición** (El Espacio Vectorial de Homomorfismos). Sean  $(V, +, \cdot)$  y  $(W, +, \cdot)$ <sup>5</sup> espacios vectoriales. Podemos definir entonces el *conjunto*

$$\text{Hom}(V, W) := \{\varphi : V \xrightarrow{\sim} W\}.$$

Podemos convertirlo en un espacio vectorial definiendo

$$\begin{aligned}\oplus : \text{Hom}(V, W) \times \text{Hom}(V, W) &\rightarrow \text{Hom}(V, W) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \varphi \oplus \psi,\end{aligned}$$

<sup>5</sup>En adelante quitaremos los subscritos (subíndices) en  $+/\cdot$  y asumiremos cuál es cuál basado en el contexto de la ecuación.

donde  $(\varphi \oplus \psi)(V) = \varphi(V) + \psi(V)$ , y de forma similar para la multiplicación  $\odot : \mathbb{R} \times \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ . La tripleta  $(\text{Hom}(V, W), \oplus, \odot)$  es el **espacio vectorial de homomorfismos**.

Ejemplo 3.3.1. Usamos de nuevo el conjunto polinomial  $P$ . Podemos convertir  $\text{Hom}(P, P)$  en un espacio vectorial definiendo  $\oplus/\odot$  como antes. Con lo que obtenemos cosas como

$$5 \odot \delta \oplus (\delta \circ \delta) \in \text{Hom}(P, P),$$

y entonces una suma de operadores derivativos de diferentes órdenes es de nuevo un mapa lineal del conjunto de polinomios.

### 3.4 Espacio Vectorial Dual

**Definición** (Espacio Vectorial Dual). Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial. Definimos el **espacio vectorial dual** (a  $V$ )  $(V^*, \oplus, \odot)$ , donde

$$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R}) := \{\varphi : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\},$$

y donde  $\oplus/\odot$  están definidos necesariamente.

Terminología. Al igual que con el vector, un elemento  $\varphi \in V^*$  es denominado informalmente un *covector*.

Realmente tenemos que ser aún más cuidadosos al hablar de covectores; tal como lo hemos definido un covector es un elemento de un espacio vectorial, pero la terminología previa nos dice que eso es un vector. Así que para llamar a algo covector, no sólo necesitamos saber que el conjunto al que pertenece tiene un espacio vectorial subyacente, tenemos que saber también que es el dual de otro espacio vectorial, cuyos elementos ya han sido denominados vectores.

Ejemplo 3.4.1. Consideremos un mapa  $I : P \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ , que nos indica que  $I \in P^*$ . Lo definimos mediante

$$I(p) := \int_0^1 dx p(x).$$

Esto nos indica que el operador integración  $I := \int_0^1 dx$  es un covector.

#### Ejercicio

Probar que  $I : P \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  es de hecho lineal.

**Teorema 3.4.2.** Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial. Si es de dimensión finita <sup>6</sup> entonces el dual doble es el propio espacio vectorial. Es decir <sup>7</sup>

$$(V^*)^* = V,$$

cuando  $\dim V < \infty$ .

Observación 3.4.3. Cuando estudiábamos física antes en la escuela realmente nos encontramos con cantidad de covectores que, en ese tiempo, llamábamos vectores. Obviamente esto era así para no tener que introducir la idea de covector. Sin embargo, sólo queremos puntualizar que los covectores no son algo nuevo que no habíamos visto antes.

<sup>6</sup>Enseguida aclararemos lo que significa la ‘dimensión’ de un espacio vectorial.

<sup>7</sup>Realmente deberíamos usar aquí un símbolo isomorfo, pero en estas notas no lo tendremos en cuenta.

### 3.5 Tensores

Si consideramos espacios vectoriales de dimensión finita, entonces una definición completamente natural para tensores es la de mapas multilineales.

**Definición** (Tensor). Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial. Un tensor- $(r, s)$ ,  $T$ , sobre  $V$  es un mapa multilineal

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-terms}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-terms}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.$$

Observación 3.5.1. Otros cambian la definición de un tensor- $(r, s)$ , en el sentido de que  $r$  nos indica cuántos términos  $V$  aparecen en el mapa de arriba y  $s$  nos indica cuántos términos  $V^*$  aparecen aquí. Es importante, antes de seguir avanzando, estar seguros de la convención que estamos usando.

Ejemplo 3.5.2. Sea  $T$  un tensor- $(1, 1)$ . Esto significa que toma como su argumento un covector y un vector. La multilinealidad de  $T$  indica que: para todo  $\varphi, \psi \in V^*$ ,  $v, w \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$T(\varphi + \psi, v) = T(\varphi, v) + T(\psi, v),$$

$$T(\lambda \cdot \varphi, v) = \lambda T(\varphi, v),$$

$$T(\varphi, v + w) = T(\varphi, v) + T(\varphi, w)$$

$$T(\varphi, \lambda \cdot v) = \lambda T(\varphi, v).$$

Ejemplo 3.5.3. vamos a poner un ejemplo de un tensor usando nuestro espacio polinomial. El mapa  $g : P \times P \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  definido por

$$g(p, q) = \int_{-1}^1 dx p(x) q(x)$$

es un tensor- $(0, 2)$  sobre  $P$ . Esto es justo el producto interno en los números reales. Así pues el producto interno es un tensor- $(0, 2)$ . Este ejemplo nos servirá muy bien para cuando más adelante tratemos de las llamadas métricas.

Terminología. Como hemos definido arriba, el número  $r$  es usualmente conocido como el *orden covariante* de  $T$  y  $s$  el *orden contravariante*. Su suma  $r + s$  es conocida como el *rango* de  $T$ .

La definición que hemos dado de tensor es solamente una forma de las que podemos ver definido un tensor. Daremos un par de definiciones más para facilitar la lectura de otros textos. Ambas requieren que nuestros espacios vectoriales sean de dimensión finita.

**Definición** (Tensor (vía Producto Tensor (*Tensor Product*))). Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial. Un tensor- $(r, s)$  es definido por

$$T = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-términos}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-términos}} \equiv V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s},$$

dónde  $\otimes$  es el llamado *producto tensor*.

Podríamos dar una definición estricta de producto tensor, pero, para nuestro propósito, podemos simplemente verlo de forma que su definición coincida con la primera definición dada. Obsérvese que aquí  $r$  y  $s$  están intercambiadas, de manera que tenemos  $r$  términos  $V$  y  $s$  términos  $V^*$ . Ahora, dado que asumimos que nuestro espacio vectorial es de dimensión finita, el Teorema 3.4.2 nos dice que  $V = (V^*)^*$ , y por eso podemos pensar en  $V$  como el conjunto de todos los mapas lineales de  $V^*$  a  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto tomamos simplemente el producto tensor para indicar que ‘tenemos  $r$  mapas lineales  $V : V^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  y  $s$  mapas lineales  $V^* : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ .’

Esta definición es útil porque nos muestra fácilmente cómo hacer tensores de órdenes superiores: hacer simplemente el producto tensor con otro tensor. Por ejemplo, si  $T$  es un tensor- $(r, s)$  y  $S$  es un tensor- $(p, q)$  entonces  $T \otimes S$  es un tensor- $(r + p, s + q)$ .

Hay una tercera manera usual de definir tensores que gusta a mucha gente. Lo veremos más fácil a través de un ejemplo.

Ejemplo 3.5.4. Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial de *dimensión finita* y sea  $T$  un tensor- $(1, 1)$ . Entonces  $T$  mapea un covector y un vector a un número real. Sin embargo, si sólo lo alimentamos con el vector nos quedamos con un mapa lineal de  $V^*$  a  $\mathbb{R}$ . Esto es, por definición, un elemento de  $(V^*)^*$ , pero debido a que nuestro espacio vectorial es de dimensión finita, Teorema 3.4.2 nos dice que  $(V^*)^* = V$ . Podemos por tanto definir el mapa  $\phi_T : V \xrightarrow{\sim} V$  por  $\phi(v) = T(\bullet, v)$ , donde  $\bullet$  indica una ranura vacía (*empty slot*). Es por esta razón por la cual la gente se refiere al tensor- $(1, 1)$  como un mapa lineal que lleva un vector a un vector. Se usan términos similares para tensores de orden superior.

Observación 3.5.5. Personalmente,<sup>8</sup> no soy un fan de hablar en absoluto de tensores- $(r, s)$ . La razón es que la notación es muy engañosa ya que falla al no tener en cuenta el orden de los espacios vectoriales en el producto cartesiano. Para aclarar lo que quiero decir, estos dos espacios con sus correspondientes conjuntos

$$\begin{aligned} V \times V^* &:= \{(v, \tilde{v}) \mid v \in V \text{ y } \tilde{v} \in V^*\}, \\ V^* \times V &:= \{(\tilde{v}, v) \mid \tilde{v} \in V^* \text{ y } v \in V\} \end{aligned}$$

no son lo mismo. La adición en los dos espacios separadamente dice ‘sumemos dos elementos en cuanto a la entrada. Así pues, las primeras entradas son sumadas juntas y las segundas entradas son sumadas juntas.’ Entonces, evidentemente, no podemos añadir un elemento del primero a un elemento del último porque el orden de las entradas está cambiado. La única forma en que podríamos hacer la adición sería redefinir el concepto de adición para tener esto en cuenta.

Sin embargo, la gente llamaría un tensor- $(1, 1)$  a un mapa lineal de cualquiera de estos espacios, pero un tensor se puede convertir en un espacio tensorial (como lo haremos enseguida) y así podríamos añadir elementos juntos en este conjunto, dada cierta regla. Sin embargo, acabamos de establecer que no hay una regla consistente para hacer esto.

En el lenguaje de la segunda definición de un tensor- $(r, s)$ , el problema tiene relación con el hecho de que no se puede comparar simplemente  $V \otimes W$  y  $W \otimes V$  para dos espacios generales. Es decir, son espacios completamente diferentes y no necesitan estar relacionados con ningún tipo de propiedad de simetría.

---

<sup>8</sup>Como yo, Richie.

Este es un problema sobre el que raramente se llama la atención en los libros de texto,<sup>9</sup> ya que los dos espacios son claramente isomorfos (lo único que hacemos es cambiar el orden de las entradas) pero creo que es un punto importante a resaltar.<sup>10</sup> Creo por lo tanto que lo mejor es simplemente dar la forma explícita a un tensor en términos de su matriz de producto tensorial, ya que así no puede haber confusión. Sin embargo, esto no es lo que el Dr Schuller hace en su curso y por lo tanto no lo haré en el resto de estas Notas.

### 3.6 Vectores y Covectores como Tensores

**Corolario 3.6.1.** *Un covector  $\varphi \in V^*$ , o sea  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ , es un tensor-(0,1).*

**Corolario 3.6.2.** *Para un espacio vectorial de dimensión finita, un vector  $v \in V$  es un tensor-(1,0).*

### 3.7 Bases

Hasta ahora hemos hablado de vectores sin mencionar en absoluto ningún número para ellos. Es decir, en ningún momento hemos dicho el vector  $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$  o algo así. Incluso para hacer tal declaración, necesitamos introducir una base, que nos diga lo que significan las entradas, para nuestro espacio vectorial. Por ejemplo,  $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$  podría significar ‘ir 1 unidad a lo largo del eje- $x$  y a lo largo del eje- $y$  2 unidades’, en cuyo caso  $x$  e  $y$  son nuestra elección de bases. Ahora, obviamente, esta no es la única elección de bases para  $\mathbb{R}^2$ , es simplemente una de las muchas innumerables. Hacer esta elección a menudo nos permite progresar firmemente con el problema que nos ocupa, sin embargo tenemos que ser conscientes del hecho de que se hizo una elección y que *cualquier cosa* derivada del uso de esa elección podría depender completamente de esa elección, con lo que queremos decir que el resultado podría ser diferente si la elección hubiese sido diferente. Si queremos asignar el resultado de nuestro cálculo como una propiedad del vector en sí (p.ej. su *longitud*) necesitamos mostrar que el resultado es independiente de la base. Por lo tanto es mejor intentar evitar todas las bases y usarlas sólo cuando sea necesario.

Como ya hemos dicho, usar una base puede a menudo simplificar mucho un cálculo y así, con el comentario de arriba in mente, procederemos ahora al estudio de las bases.

**Definición** (Bases para el espacio Vectorial). Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial. Un subconjunto  $B \subseteq V$  es denominado una **base** (Hamel)<sup>11</sup> si

$$\forall v \in V, \exists! \text{ finito } F = \{f_1, \dots, f_n\} \subset B : \exists! v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} : v = v^1 f_1 + \dots + v^n f_n.$$

Esta no es la única manera de definir una base-(Hamel) y de hecho no es la más útil para los cálculos. En su lugar damos la siguiente definición

**Definición** (Base para un Espacio Vectorial (independencia lineal)). Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial. Un subconjunto  $B = \{e_1, \dots, e_d\} \subseteq V$  es denominado una **base** si

<sup>9</sup>Al menos en los que yo he leído.

<sup>10</sup>Una actitud recibida de de mi profesor en la universidad, que señaló todo esto.

<sup>11</sup>Como opuesto a una base-Schauder. Para más información véase el curso Quantum Theory del Dr. Schuller.

- (i) La base *se extiende sobre/genera* ("spans/generates")  $V$ ; o sea cualquier  $v \in V$  puede ser escrito como una combinación lineal de elementos base, y
- (ii) Los elementos bases son linealmente independientes; o sea

$$\sum_{i=1}^d \lambda^i e_i = 0 \implies \lambda^i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

**Definición** (Dimensión del Espacio Vectorial). Si existe una base  $B \subseteq V$  para un espacio vectorial  $(V, +, \cdot)$  con un número finito de elementos, digamos muchos  $d$ , entonces llamamos a  $d$  la **dimensión del espacio vectorial**, indicada como  $\dim V = d$ .

Afirmación 3.7.1. Afirmamos que la dimensión de un espacio vectorial está bien definida. Es decir que cada base de  $V$  tendrá  $d$  elementos.

Nótese que la definición de arriba vale para espacios vectoriales tanto de dimensión finita como infinita, porque no requerimos  $d < \infty$ . Sin embargo, en adelante en estas notas asumiremos que siempre tratamos con espacios vectoriales de dimensión finita, salvo especificación en contrario.

Observación 3.7.2. Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial. Entonces una vez elegida una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , podemos asociar de forma única

$$v \mapsto (v^1, \dots, v^n),$$

llamados los **componentes** de  $v$  con respecto a la base elegida, de forma que  $v = v^1 e_1 + \dots v^n e_n$ .

Por supuesto, dado un espacio vectorial  $(V, +, \cdot)$  y su espacio dual  $(V^*, +, \cdot)$ , podemos elegir una base en cada espacio completamente independientes una de la otra. Sin embargo, hay una forma muy bonita, e increíblemente útil, mediante la cual podemos relacionar estas bases.

**Definición** (Base Dual). Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial y sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base en dicho espacio. Definimos la **base dual** del espacio dual  $(V^*, +, \cdot)$  como  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$  que cumple

$$\epsilon^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

#### Ejercicio

Probar que la restricción anterior define de forma única los elementos  $\{\epsilon^i, \dots, \epsilon^n\}$  y muestra que de hecho forman una base para  $(V^*, +, \cdot)$ .

*Ayuda:* Usar la linealidad de los elementos  $\varphi \in V^*$ .

Ejemplo 3.7.3. Sea el conjunto  $N = 3$  en nuestro espacio polinomial (es decir el orden más alto está al cubo). Entonces el conjunto  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ <sup>12</sup> es una base para este espacio si identificamos

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2, \quad e_3(x) = x^3.$$

<sup>12</sup>Nótese que empezamos el índice en 0 porque se relaciona muy bien con el orden del término. Obviamente no es más que un índice y lo podemos denominar como nos guste, así que esto está bien.

Es fácil ver que esto es una base porque cualquier polinomio de orden 3 puede ser escrito con una combinación lineal de esos términos. La base dual para el espacio dual viene dada por

$$\epsilon^a = \frac{1}{a!} \partial^a|_{x=0},$$

para  $a = 0, 1, 2, 3$ . Un cálculo directo nos muestra que esto satisface la condición necesaria.

### 3.8 Componentes de Tensores

**Definición** (Componentes de Tensores). Sea  $T$  un tensor- $(r, s)$  en un campo vectorial de dimensión finita  $(V, +, \cdot)$  y sea  $\{e_1, \dots, e_{\dim V}\}$  una base para dicho espacio con la correspondiente base dual  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^{\dim V}\}$ . Definimos entonces los muchos números  $(r + s)^{\dim V}$

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} := T(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \in \mathbb{R}$$

para  $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, \dim V\}$ . Estos son conocidos como los **componentes de  $T$  con respecto a** las bases elegidas.

Observación 3.8.1. Realmente no es necesario que tomemos la base dual de arriba para poder definir los componentes de un tensor. Cualquier base para el espacio dual lo hará, pero esto casi nunca se hace.

Conociendo los componentes (y la correspondiente base) de un tensor, podemos reconstruir el tensor completo.

Ejemplo 3.8.2. Sea  $T$  un tensor- $(1, 1)$ . Entonces  $T^i_j := T(\epsilon^i, e_j)$ , entonces, usando la multilinealidad del tensor, tenemos

$$T(\varphi, v) = T\left(\sum_{i=1}^{\dim V} \varphi_i \epsilon^i, \sum_{j=1}^{\dim V} v^j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{\dim V} \varphi_i v^j T(\epsilon^i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{\dim V} \varphi_i v^j T^i_j.$$

Terminología. A un índice superior lo llamamos índice *contravariante* y a un índice inferior índice *covariante* y nos ceñimos a la convención de que un vector tiene componentes con índices contravariantes y elementos base con índices covariantes, y los covectores al revés. Esto encaja con la denominación que hemos dado antes de orden contravariante/covariante de un tensor.

Con objeto de no tener que hacer continuamente sumación de índices a Einstein se le ocurrió una notación inteligente, conocida como **convención de sumación de Einstein**, por la cual cualquier índice repetido en que uno está arriba y el otro abajo es sumado implícitamente. Por ejemplo

$$v^i e_i = \sum_i v^i e_i.$$

Esta notación inmediatamente nos dice siempre que la misma etiqueta de índice aparece más de dos veces, nos encontramos ante algo mal definido. Igualmente no es bueno tener el mismo índice apareciendo en ambos, arriba y abajo. Es por eso que no queremos cosas como

$$T^i_j S^i_i \quad \text{or} \quad v^i w^i.$$

Con la convención de sumación de Einstein, sólo podemos sumar dos términos que tengan los mismos índices en el mismo lugar, por tanto

$$T^{ij}{}_k + S^{ij}{}_k = R^{ij}{}_k$$

está bien, pero

$$T^{ij}{}_k + S^i{}_{jk} = R_{ij}{}^k$$

no está bien definido. En la nota de Observación 3.5.5, tampoco está bien definido escribir cosas como

$$T^{ij}{}_k + S_k{}^{ij},$$

a menos que se haya especificado cierta propiedad, p.ej.  $S_k{}^{ij} = 3S^{ij}{}_k$ .

Observación 3.8.3. Nótese que estamos usando la convención de sumación de Einstein porque estamos considerando mapas multilineales. Esto es lo que podríamos tener

$$\varphi(v^1 e_i) = \varphi\left(\sum_i v^i e_i\right) \quad \text{or} \quad \varphi(v^1 e_i) = \sum_i \varphi(v^i e_i),$$

y esto es porque la multilinealidad equipara los dos que están bien.



## 4 | Variedades Diferenciales

Hemos hablado hasta ahora de variedades topológicas (*Differentiable Manifolds*), las cuales nos han permitido hablar de continuidad de una curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ . Si vamos a asociar (y lo haremos) el movimiento de una partícula en el espaciotiempo como una curva en la variedad, queremos más que sólo continuidad; queremos ser capaces de asociar una *velocity* a cada punto de la curva. Más o menos, pensamos en la velocidad de una curva como un vector tangente a la curva, que lo obtenemos diferenciando la curva.

La cuestión entonces es: es la estructura que ya tenemos en la variedad topológica  $d$ -dimensional  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  suficiente para poder hablar de diferenciabilidad o necesitamos algo más de estructura? La respuesta rápida es ‘no, necesitamos más estructura.’ Lo veremos en esta sesión (*"lecture"*), mientras que también resolveremos *qué* estructura extra necesitamos para poder hablar de diferenciabilidad de curvas.

De hecho, lo queremos definir también para: funciones,  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , y mapas,  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ .

### 4.1 Estrategia

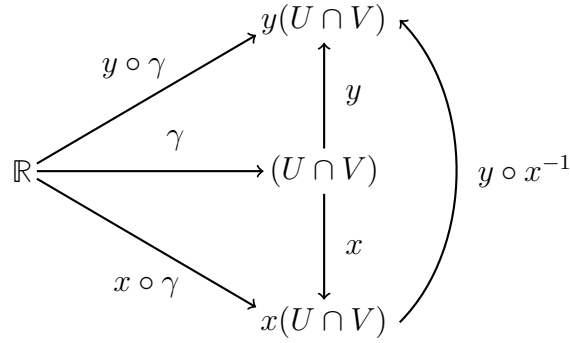
Consideremos primero el caso de las curvas,  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ . Recordemos que en la sesión 2 dijimos que podemos asignar propiedades a las variedades considerando los representantes de las cartas o representantes gráficos (*chart representatives*), que eran los mapas  $x \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^d$ . Ya tenemos una idea de la diferenciabilidad de esas curvas de los cursos de pregrado, y por eso buscamos usarlo para definir lo que significa cuando decimos que la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  es diferenciable.

Consideremos la parte de la curva que se encuentra en el dominio de la carta  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U$ .<sup>1</sup> Una vez que hemos solucionado hasta aquí la diferenciabilidad, la podemos extender a la noción global de la curva entera. Recordemos que si vamos a hacer esta "subida" de concepto al nivel de variedad, tenemos que estar seguros de que el concepto subido es independiente de la carta, es decir usando cualquier carta, el resultado siempre es el mismo. Cuando nos encontrábamos con esto antes estaba bien, porque sabíamos que la composición de mapas continuos es continua, y por eso los mapas de transición de cartas eran continuos. Sin embargo la continuidad del mapa de transición de cartas *no* garantiza su diferenciabilidad pregrado ya que podría haber un punto de inflexión repentino en la curva.

A primera vista, parece que nuestra estrategia no funciona. Sin embargo, hay un remedio para esto que ya insinuamos en la sesión 2, que lo veremos en la próxima sección (Cartas compatibles).

---

<sup>1</sup>En realidad lo deberíamos renombrar como algo así  $\gamma_U$ , pero no queremos complicar tanto la notación, por lo que lo denominaremos simplemente  $\gamma$ .



**Figura 4.1:** Dos cartas  $(U, x)$  y  $(V, y)$  usadas para representar una curva física  $\gamma$ . Asumimos que sabemos que el mapa  $x \circ \gamma$  es llamado "diferenciable pregrado" ("undergraduate differentiable"). Sin embargo, todavía no podemos concluir si  $\gamma$  en sí es diferenciable ya que la continuidad del mapa de transición de cartas  $y \circ x^{-1}$  no garantiza la diferenciable (podría haber un punto de inflexión repentino en la gráfica de la curva).

## 4.2 Cartas compatibles

El problema mencionado arriba surge del hecho de haber tomado  $(U, x)$  y  $(V, y)$  como *cualquier* carta para nuestra variedad topológica  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ . Para enfatizar esto, podemos decir que los hemos tomado del atlas máximo  $\mathcal{A}_{max}$ . Si en cambio hubiéramos insistido en que nuestras cartas vienen de un atlas más pequeño, que sabíamos no contenía cartas solapadas y sólo cartas continuas (y no diferenciables), podríamos haber resuelto el problema. En otras palabras, "arrancamos" las páginas de nuestro atlas que corresponden a funciones de transición de cartas que no son diferenciables. Ahora bien, después de hacer esto, no hay garantía de que nos quedamos con un atlas, ya que puede ocurrir que ya no cubramos el espacio completo; pero si lo cubrimos, entonces tenemos una oportunidad mucho mejor de definir lo que entendemos por diferenciable de una curva. Lo consideramos entonces un *atlas restringido*.

Nótese que esta es una *gran* elección a hacer. Haciéndolo, todo lo que hablemos más adelante basado en la diferenciable de una curva puede ser tratado *únicamente* en una carta que provenga de nuestro atlas restringido..

**Definición** (cartas compatibles). Dos cartas  $(U, x)$  y  $(V, y)$  de una variedad topológica  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  son denominadas  $\square$ -**compatibles**<sup>2</sup> si uno de estos dos

- (a)  $U \cap V = \emptyset$ , o
- (b)  $U \cap V \neq \emptyset$  y los mapas de transición de cartas  $(x \circ y^{-1}) : y(U \cap V) \rightarrow x(U \cap V)$  y  $(y \circ x^{-1}) : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$  son  $\square$  'pregrado'.<sup>3</sup>

**Definición** (Atlas Compatible/Restringido). Un atlas  $\mathcal{A}_{\square}$  es un **atlas compatible-** $\square$  si todas sus cartas son compatible- $\square$ .

<sup>2</sup>He intentado dibujar una flor como la que usa el Dr Schuller, pero overleaf no la tenía. Disculpas por mi limitación  $\square$ .

<sup>3</sup>Es decir que tienen la propiedad  $\square$  como mapas de  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , que conocemos de los primeros cursos de grado.

**Definición.** Una variedad- $\square$  es la tripleta  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}_\square)$ .

Es posible ahora que existan dos criterios distintos de ‘arrancar páginas’ para obtener un atlas compatible- $\square$ . Es decir que puede haber más de un atlas que sea compatible- $\square$ . En este caso, tenemos que hacer la elección de cuál usar, pero debemos recordar siempre la elección hecha, ya que uno de estos atlas podría permitir que sea definida una propiedad diferente, digamos  $\blacksquare$ , mientras que el otro no. Físicamente, es obvio que esto es algo muy importante a tener en cuenta, ya que  $\square$  y  $\blacksquare$  son propiedades físicas de la curva y por lo tanto no dependen de qué cartas o atlas elijamos para usarlas, por lo que debemos elegir los que coincidan con la física.

Antes de seguir adelante, consideremos los tipos de cosas que puede ser un  $\square$ .

$\square$	$\square$ de pregrado
$C^0$	$C^0(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$ , continuo con respecto a la topología estándar en $\mathbb{R}^d$ .
$C^1$	$C^1(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$ , diferenciable una vez con resultado con respecto a la topología estándar en $\mathbb{R}^d$ .
$C^k$	$C^k(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$ , $k$ -veces continuamente diferenciable.
$D^k$	$D^k(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$ , $k$ -veces diferenciable, no necesita ser continuo.
$C^\infty$	$C^\infty(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$ , infinitamente diferenciable con resultado continuo, conocido como <b>suave (smooth)</b> .
$C^\omega$	$C^\omega(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$ , funciones analíticas (pueden ser expandidas por Taylor).
$\mathbb{C}^\infty$	$\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n})$ , $\dim \mathcal{M} = 2n$ para $n$ entero, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann por parejas. Esto nos da una variedad <i>compleja</i> .

**Teorema 4.2.1** (Teorema de Whitney). *Todo atlas- $C^k$   $\mathcal{A}_{C^k}$  para  $k \geq 1$  para una variedad topológica, contiene como subatlas un atlas  $C^\infty$ .*

No vamos a demostrar este teorema, sino que simplemente daremos una motivación mediante un ejemplo.

*Ejemplo 4.2.2.* Digamos que estuviésemos interesados en que las curvas fuesen  $C^2$ , entonces la tercera derivada sería discontinua. Para tratar con esas curvas necesitaríamos un atlas- $C^2$ . Sin embargo, una función que es  $C^3$  también es  $C^2$  y entonces todavía podríamos hablar de estas curvas en un atlas- $C^3$  puesto que  $C^3 \circ C^2 = C^2$ , más o menos. Es decir, si insistimos en que nuestras funciones de transición son  $C^3(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$  podemos entonces obtener una noción bien definida para que la curva sea  $C^2$ . Repitiendo esto de nuevo, resulta que podríamos usar un atlas- $C^\infty$  para describir nuestras curvas.

Nótese que el teorema no dice que podemos convertir una curva  $C^2$  en una curva  $C^\infty$ , sino sólo que podemos referirnos a ello en ambos, un atlas- $C^2$  y un atlas- $C^\infty$ .

Este es un buen teorema para la física, porque ahora no necesitamos ‘preocuparnos por cuantas derivadas debemos tener para estar seguros?’ Solamente estar seguros de que al menos es  $C^1$  y a continuación tomar el subatlas. Por tanto, podemos, sin pérdida de generalidad, considerar siempre variedades- $C^\infty$ , o variedades **suaves** (a menos que queramos definir capacidad de expansión Taylor o diferenciabilidad compleja, etc).

### 4.3 Difeomorfismos

Recordemos que siempre que introducimos una nueva estructura en un objeto vale la pena estudiar los mapas preservadores de la estructura. Estos mapas son conocidos generalmente como **isomorfismos**. Para dos conjuntos, el isomorfismo es una biyección. Ya vimos que para espacios topológicos el isomorfismo es una biyección continua cuyo inversa es también continua, y lo llamábamos *homeomorfismos*. Dos objetos que están relacionados por un isomorfismo se denominan **isomorfos**.

**Definición** (Mapas suaves). Sean  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A}_{\mathcal{M}})$  y  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}, \mathcal{A}_{\mathcal{N}})$  dos variedades suaves (*smooth manifolds*)  $m$  y  $n$ , respectivamente. Se dice que un mapa  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es  $C^\infty$  (o **suave**) si el mapa  $y \circ \varphi \circ x^{-1}$  es  $C^\infty$  pregrado (*undergraduated*) para cartas  $(U, x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$  y  $(V, y) \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ .

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{y \circ \varphi \circ x^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

*Observación 4.3.1.* Nótese que acabamos de dar la definición justo para dos cartas  $(U, x)$  y  $(V, y)$ . Ya sabemos que si esto vale para una carta valdrá para todas porque la variedad es suave y por lo tanto cambiar de carta es  $C^\infty$ . Es decir que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{y} \circ \varphi \circ \tilde{x}^{-1} & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n & \\ & \uparrow \tilde{x} & & \uparrow \tilde{y} & \\ C^\infty & U & \xrightarrow{\varphi} & V & C^\infty \\ & \downarrow x & & \downarrow y & \\ & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{y \circ \varphi \circ x^{-1}} & \mathbb{R}^n & \\ & \nwarrow & & \nearrow & \end{array}$$

**Definición** (Difeomorfismo). Sean  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A}_{\mathcal{M}})$  y  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}, \mathcal{A}_{\mathcal{N}})$  dos variedades suaves. Son isomorfas si existe una biyección  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  tal que  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  son mapas  $C^\infty$ . Un mapa tal es conocido como **difeomorfismo** y la variedad se denomina **difeomorfa**.

Podemos imaginar el difeomorfismo pensando en dos superficies ‘moldeadas’ entre sí, sin cortar/rasgar/doblar la superficie. Por ejemplo, la superficie de una esfera como una variedad

diferencial es difeomorfa a la superficie de una patata,<sup>4</sup> pero no es difeomorfa a un donut. En otras palabras, a nivel de variedad suave, las cosas aún no tienen una forma, sino que están hechas de una especie de sustancia fluida.<sup>5</sup>

**Teorema 4.3.2.** *El número de variedades- $C^\infty$  que pueden hacerse a partir de una variedad- $C^0$  (si la hay), hasta el difeomorfismo<sup>6</sup> viene dado por la siguiente tabla:*

$\dim \mathcal{M}$	No. de variedades- $C^\infty$
1	1
2	1
3	1
4	muchas infinitamente incontables
5	finitamente muchas
6	finitamente muchas
7	finitamente muchas
$\vdots$	$\vdots$

Los primeros tres resultados de la tabla son los llamados teoremas de *Moise-Radon*, y los resultados 5,6,7,... son mostrados usando un área de la topología conocida como *teoría de la cirugía* (*surgery theory*). Desafortunadamente como físicos, estamos más interesados en  $\dim \mathcal{M} = 4$  para el espaciotiempo. Ah, la ley de Murphy!

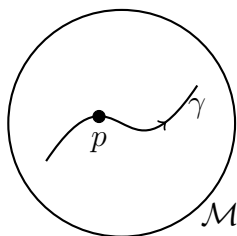
<sup>4</sup>Con tal de que no haya salientes puntiagudos y/o agujeros en la patata.

<sup>5</sup>Esto no es una definición técnica, por favor no me citen al respecto.

<sup>6</sup>Es decir, dos variedades- $C^\infty$  que sean difeomorfas cuentan como una sola.

## 5 | Espacios Tangente

El objetivo de esta clase es dar respuesta a la siguiente pregunta: cuál es la velocidad de una curva  $\gamma$  en el punto  $p \in \mathcal{M}$ ?



Consiguiendo esto, lo primero que queremos es olvidar todo lo que ya conocemos sobre el significado de "velocidad". En esta sesión redescubriremos lo que significa.

### 5.1 Velocidades

**Definición** (Campos escalares). El espacio vectorial con conjunto

$$C^\infty(\mathcal{M}) := \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es una función suave}\}$$

equipado con adición puntual  $(f \oplus g)(p) = f(p) + g(p)$  y multiplicación-s escalar  $(\lambda \odot f)(p) = \lambda \cdot f(p)$ , es conocido como el espacio de **campos escalares** (o funciones suaves) en  $\mathcal{M}$ .

*Ejemplo 5.1.1.* Un ejemplo de una función suave en  $\mathcal{M}$  es la distribución de temperatura. A cada punto en la habitación (que es  $\mathcal{M}$ ) asociamos un número real, la temperatura en ese punto.

*Observación 5.1.2.* Realmente deberíamos tener cierto cuidado con la terminología anterior. Una función suave se define para dos variedades cualesquiera de dimensión arbitraria, con tal de que, obviamente, el mapa sea suave. Un campo escalar es estrictamente un mapa a una variedad unidimensional, en este caso los números reales  $\mathbb{R}$ . La notación  $C^\infty(\mathcal{M})$  significa que estamos considerando el mapa a los reales. Una función suave general la indicaríamos como  $C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  o algo similar.

**Definición.** Consideremos una variedad suave  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  y una curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  que es al menos  $C^1$ . Supongamos  $\gamma(\lambda_0) = p \in \mathcal{M}$ . La **velocidad** de  $\gamma$  en  $p$  es el *mapa lineal*

$$v_{\gamma, p} : C^\infty(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R},$$

definido por

$$v_{\gamma, p}(f) := (f \circ \gamma)'(\lambda_0).$$

La intuición aquí es que a medida que nos desplazamos en el mundo (es decir nos movemos a lo largo de  $\gamma$ ) nos preguntamos cómo cambia (el campo escalar) en la dirección de nuestro movimiento. Entonces tomamos la derivada del campo escalar. Lo veremos más concreto enseguida.

## 5.2 Espacio Vectorial Tangente

**Definición** (Espacio Vectorial Tangente). Para cada punto  $p \in \mathcal{M}$  definimos el espacio vectorial, conocido como el **espacio (vectorial) tangente** a  $\mathcal{M}$  at  $p$ , cuyo conjunto es

$$T_p\mathcal{M} := \{v_{\gamma,p} \mid \gamma \text{ curva suave por } p\},$$

y cuyas adición y multiplicación-s vienen dadas por

$$\begin{aligned} (v_{\gamma,p} \oplus v_{\delta,p})(f) &:= v_{\gamma,p}(f) + v_{\delta,p}(f), \\ (\alpha \odot v_{\gamma,p})(f) &:= \alpha \cdot v_{\gamma,p}(f). \end{aligned}$$

Necesitamos probar que la parte derecha de las dos últimas expresiones caen de hecho en  $T_p\mathcal{M}$ . O sea, tenemos que probar que

- (i) Existe una  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $\alpha \odot v_{\gamma,p} = v_{\tau,p}$ , y
- (ii) Existe una  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $v_{\gamma,p} \oplus v_{\delta,p} = v_{\sigma,p}$ .

*Proof.* Es claro que ambas expresiones del lado derecho serán elementos de  $\text{Hom}(C^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R})$ , pero necesitamos comprobar que son velocidades de algunas curvas a través de  $p$ . Considerémoslas en ternas

- (i) Sea  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma(\lambda_0) = p$ . Construimos la curva  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  mediante

$$\tau(\lambda) := \gamma(\alpha\lambda + \lambda_0) = (\gamma \circ \mu_\alpha)(\lambda),$$

donde  $\mu_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $\mu_\alpha(\lambda) := \alpha\lambda + \lambda_0$ . Afirmamos que esta curva satiface nuestra condición.

Notemos primero que  $\tau(0) = \gamma(\lambda_0) = p$  y por eso pasa por el punto, que es lo que se requiere. Entonces

$$\begin{aligned} v_{\tau,p}(f) &:= (f \circ \tau)'(0) \\ &= (f \circ \gamma \circ \mu_\alpha)'(0) \\ &= \alpha \cdot (f \circ \gamma)'(\lambda_0) \\ &=: \alpha \cdot v_{\gamma,p}(f), \end{aligned}$$

donde hemos usado la regla de la cadena multidimensional para ir de la segunda línea a la tercera junto con  $\mu_\alpha(0) = \lambda_0$  y  $\mu'_\alpha(0) = \alpha$ . Puesto que esto es válido para cualquier  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ , obtenemos el resultado.

- (ii) Esto es un poco más complicado. Para mostrarlo, introduciremos una carta  $(U, x)$ . Sin embargo, como ya hemos explicado, es importante que la elección de la carta no tenga un papel vital en el resultado; es decir que el resultado debe ser independiente de la carta, así que tendremos que comprobarlo al final. De nuevo, sea  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma(\lambda_0) = p$ . Se forma similar, sea  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $\delta(\lambda_1) = p$ .

Construimos la curva  $\sigma_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ , donde el subíndice nos recuerda que estamos trabajando una carta, mediante

$$\sigma_x(\lambda) := x^{-1}((x \circ \gamma)(\lambda_0 + \lambda) + (x \circ \delta)(\lambda_1 + \lambda) - (x \circ \gamma)(\lambda_0)).$$

Afirmamos una vez más que esta curva satisface nuestra condición. Primero, tenemos que comprobar que pasa por el punto  $p$ , y un rápido cálculo muestra que  $\sigma_x(0) = p$ , por lo que podemos proceder. Tenemos

$$\begin{aligned} v_{\sigma_x, p}(f) &:= (f \circ \sigma_x)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \sigma_x)'(0) \end{aligned}$$

Y ahora tenemos  $(f \circ x^{-1}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  y  $(x \circ \sigma_x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  y entonces usamos la regla de la cadena multidimensional. Tenemos<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} v_{\sigma_x, p}(f) &:= (x^i \circ \sigma_x)'(0) \cdot \partial_i (f \circ x^{-1})|_{(x \circ \sigma_x)(0)} \\ &= ((x^i \circ \gamma)'(\lambda_0) + (x^i \circ \delta)'(\lambda_1)) \cdot \partial_i (f \circ x^{-1})|_{x(p)} \\ &= (f \circ \gamma)'(\lambda_0) + (f \circ \delta)'(\lambda_1) \\ &=: v_{\gamma, p}(f) + v_{\delta, p}(f), \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación ‘evaluado en’  $|$  para reducir la posible confusión, y donde para conseguir la penúltima línea hemos hecho la regla de la cadena multidimensional a la inversa (es decir, hemos dado los pasos hacia atrás hasta ese punto pero no con  $\gamma$  y  $\delta$ ). La línea final no hace referencia a la carta  $(U, x)$  y por eso sabemos que podemos usar *cualquier* carta en nuestro atlas para hacer esto y por tanto el resultado es independiente de la carta. Finalmente, ya que una vez más esto aplica para una función general  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$  obtenemos el resultado.

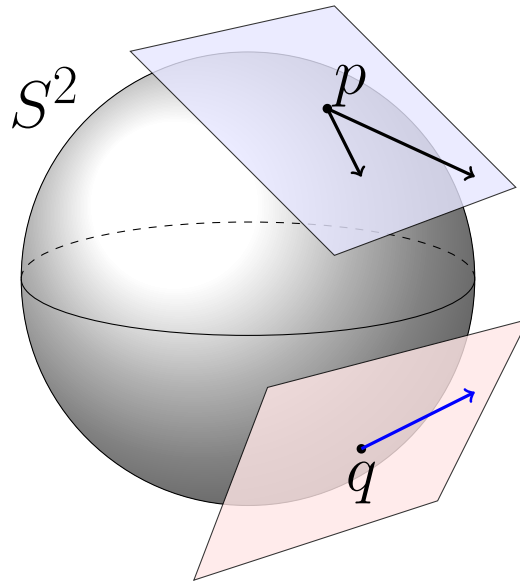
□

Observación 5.2.1. El Dr. Schuller nos muestra en esta sesión unas bonitas descripciones de imágenes (comenzando hacia 39:00 en el vídeo), que merece la pena ver. No las he mostrado aquí porque llevaría bastante tiempo (especialmente la propiedad (ii)) en Tikz, y no me siento con ánimo para eso, pero merece la pena verlas, así que mírenlas si aún no lo han hecho!

Es importante notar que en todo lo anterior siempre hemos mostrado el mismo punto  $p \in \mathcal{M}$ . No tiene sentido sumar dos velocidades que son las tangentes en diferentes puntos, es decir  $v_{\gamma, p} \oplus v_{\delta, q}$  sólo tiene sentido cuando  $p = q$ . Una manera de recordar esto es pensar en dos velocidades que son pequeñas flechas en planos tangentes a la variedad. Por ejemplo si  $\mathcal{M} =$

<sup>1</sup>Usamos un índice  $i$  para indicar cual es el elemento de  $\mathbb{R}^d$  que estamos considerando.  $\partial_i$  evidentemente significa la derivada con respecto al  $i^{\text{ésimo}}$  elemento.





**Figura 5.1:** Planos tangentes en dos puntos  $p, q \in \mathcal{M} = S^2$ . Las flechas son las tangentes a las curvas (no dibujadas) en la variedad. Las dos velocidades en  $p$  (flechas negras) pueden ser sumadas porque viven en el mismo plano tangente pero no tiene sentido sumar una de ellas a la velocidad en  $q$  (flecha azul).

$S^2$ , la 2-esfera,<sup>2</sup> entonces tenemos algo como esto Figura 5.1. Pensémoslo de esta manera, queda claro por qué no podemos sumar dos velocidades que son tangentes en diferentes puntos: viven en planos  $\mathbb{R}^2$  completamente separados, por lo que no tiene sentido sumarlas. Podría pensarse ‘bueno, no podríamos poner la velocidad en  $q$  sobre el plano tangente en  $p$ ?’ La respuesta correcta a esta pregunta viene más adelante, pero la respuesta corta es ‘sólo si tenemos en cuenta la llamada curvatura intrínseca de la variedad’.

*Observación 5.2.2.* Tal como se destaca en la figura de arriba, a menudo imaginamos las velocidades como pequeñas flechas que son tangentes a las curvas y apuntan desde la variedad. Para poder hacer esto, obviamente primero tenemos que *embeber* (*embed*) nuestra variedad en un espacio de mayor dimensión (por eso miramos a la 2-esfera en  $\mathbb{R}^3$ ). Sin embargo, tan pronto como empezamos a considerar variedades de dimensión  $d \geq 3$ , nos surge un problema: tenemos que dibujar un espacio cuatri-dimensional, y yo no puedo visualizar espacios 4D.<sup>3</sup> Además de este obstáculo, cuando empezamos a hablar del universo, si embebemos en él algo, entonces estamos hablando de cosas que se encuentran fuera del universo, que es una madriguera de conejo en la que no queremos caer.<sup>4</sup>

Felizmente, nuestra formulación de lo que es una velocidad no hace referencia a estar embebido en espacio de mayor dimensión. Ha sido definida *intrínsecamente* en la propia variedad. Esto parece prometedor, pero tenemos que asegurar que las dos ideas coinciden entre sí. La respuesta es que sí coinciden, por lo que podemos elegir cómo queremos idear

<sup>2</sup>Para los que no les sea familiar, una 2-esfera es lo que imaginamos como la superficie de una bola de 3d. La superficie es 2-dimensional y por eso la denominamos 2-esfera.

<sup>3</sup>Si ustedes pueden, manos a la obra!

<sup>4</sup>Tomaré la píldora azul, Morfeo.

los espacios tangentes en base a caso por caso: tomar la idea de embeber cuando lo permite nuestra intuición, y usando la definición intrínseca en el caso de cosas difíciles de imaginar.

### 5.3 Componentes de un Vector con respecto a una Carta

Sea  $(U, x)$  una carta de una variedad  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  y sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  una curva que pasa por el punto  $p \in U$  como  $\gamma(0) = p$ . Ahora tenemos el cálculo

$$\begin{aligned} v_{\gamma,p}(f) &:= (f \circ \gamma)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma)'(0) \\ &= (x^i \circ \gamma)'(0) \cdot \partial_i(f \circ x^{-1})|_{x(p)} \end{aligned}$$

Lo primero que notamos, como ya vimos antes, es que el índice en  $\partial_i$  nos indica la *entrada* por la que hay que derivar. Es decir que no hace ninguna referencia a  $x$ , sino simplemente dice ‘sea cual sea la  $i$ -ésima entrada, dérivese por ella.’<sup>5</sup> Como hay que escribir bastante, vamos a introducir una nueva notación para simplificarlo: definimos

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p := \partial_i(f \circ x^{-1})|_{x(p)}, \quad \text{y} \quad \dot{\gamma}_x^i(0) := (x^i \circ \gamma)'(0),$$

Donde los colores se usan para indicar que los términos aparecen en ambos lados. Lo primero que hay que decir es que esto es *simple notación*. El primer término se parece mucho a una derivada parcial, sin embargo es algo completamente diferente; es simplemente notación para el lado derecho. Obviamente esta notación no se ha hecho por accidente y resulta que posee todas las propiedades que habríamos deseado para una derivada parcial, pero que todavía no cumple ninguna..

Dado lo de arriba, podemos escribir la velocidad de una curva en el punto  $p$  de la forma siguiente

$$v_{\gamma,p}(f) = \dot{\gamma}_x^i(0) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p(f),$$

o, como un *mapa*, podemos escribir

$$v_{\gamma,p} = \dot{\gamma}_x^i(0) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

**Definición** (Componentes de un Vector con respecto a una Carta). Llamamos  $\dot{\gamma}_x^i(0)$  al  $i$ -ésimo **componente** del vector velocidad en el punto  $p \in \mathcal{M}$  con respecto a la carta  $(U, x)$ .

**Definición** (Elementos base de  $T_p U$ ). Llamamos  $\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$  al  $i$ -ésimo **elemento base** de  $T_p U$  respecto al cual deben ser entendidos los componentes.

Nótese que arriba sólo tenemos un elemento base para  $T_p U$ , no  $T_p \mathcal{M}$  ya que la carta sólo está definida para el subconjunto  $U$ .

<sup>5</sup>Esto es análogo al hecho de que dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definimos  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  completamente independiente de la variable que estamos usando. Así pues  $f' = \frac{df}{dx}$  no es una expresión general, sino una elección de notación, una vez hemos decidido que  $x$  es nuestra variable.

**Corolario 5.3.1.** *La acción de un elemento base en la  $j$ -ésima función coordenada  $x^j$  satisface<sup>6</sup>*

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (x^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j, \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

*Proof.* Usamos el hecho de que  $x^j \circ x^{-1}$  sólo nos da la  $j$ -ésima entrada de  $x(p)$ . Obviamente, entonces, si tratamos de derivar con respecto a cualquiera de las entradas obtenemos 0 (porque la entrada ya es 0), pero si derivamos con respecto a esta entrada obtenemos 1. Esto es justamente  $\delta_i^j$ .  $\square$

#### 5.4 Bases inducidas por Cartas

**Teorema 5.4.1.** *Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  una variedad suave  $d$ -dimensional. El conjunto*

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^d} \right)_p \right\}$$

*constituye una base para el espacio tangente  $T_p U$ , y es conocido como la **base inducida por la carta**.*

*Proof.* Ya hemos sabido que generan  $T_p U$ , ya que cualquier vector en  $T_p U$  puede ser escrito en función de ellas (las bases). Todo lo que queda por ver es que son linealmente independientes, es decir, se requiere que

$$\sum_{i=1}^d \lambda^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = 0 \implies \lambda^i = 0 \quad \forall i.$$

Consideremos la acción en la  $j$ -ésima función coordenada,  $x^j$ . Tenemos

$$\sum_{i=1}^d \lambda^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (x^j) = \sum_{i=1}^d \lambda^i \delta_i^j = \lambda^j$$

y entonces obtenemos el resultado.  $\square$

**Corolario 5.4.2.** *La dimensión del espacio tangente es igual a la dimensión de la variedad*

$$\dim T_p \mathcal{M} = \dim \mathcal{M}.$$

*Proof.* Esto se sigue precisamente del hecho de que hay  $d$ -elementos base por  $T_p U$  para todos los dominios de cartas y del hecho de que  $d$  venía de la dimensión de  $\mathcal{M}$ .  $\square$

<sup>6</sup>Nótese que hemos usado aquí el paréntesis angular. Esto tiene sentido ya que  $x^j : U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^\infty$  (por ser una variedad suave) y  $\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \in T_p \mathcal{M}$  es un vector. Esto destaca el beneficio de usar esta notación.

### 5.5 Cambio de los Componentes de un Vector bajo Cambio de Carta

A veces nos encontramos con declaraciones como ‘un vector se transforma como [insertar ecuación] bajo un cambio de carta’. Sin embargo, sabemos que esta declaración no es completa, ya que los vectores (y también los tensores) son objetos abstractos que son completamente independientes de las cartas. La velocidad del pájaro es la velocidad del pájaro. Así pues, lo único que podríamos insertar en la declaración es ‘no se transforman’, pero esto en sí mismo no es muy útil para los cálculos. Una declaración mejor, y mucho más útil, es ‘los *componentes*<sup>7</sup> de un vector se transforman como [insertar ecuación] bajo un cambio de carta’.

Sean  $(U, x)$  y  $(V, y)$  cartas solapadas para una variedad  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  y  $p \in U \cap V$ . Si  $X \in T_p \mathcal{M}$  entonces podemos descomponerlo en cualquiera de las cartas,

$$X = X_{(x)}^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad \text{y} \quad X = X_{(y)}^i \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p$$

Para estudiar cómo se relaciona todo esto, consideremos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (f) &:= \partial_i (f \circ x^{-1})|_{x(p)} \\ &= (f \circ y^{-1} \circ y \circ x^{-1})|_{x(p)} \\ &= \partial_i (y^j \circ x^{-1})|_{x(p)} \cdot \partial_j (f \circ y^{-1})|_{y(p)} \\ &= \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y^j} \right)_p \\ \implies \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p &= \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p \end{aligned}$$

Insertando esto en el hecho de que  $X$  puede ser expresado en cualquier base, tenemos

$$\begin{aligned} X_{(y)}^j \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p &= X_{(x)}^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \\ &= X_{(x)}^i \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p \\ \implies X_{(y)}^j &= X_{(x)}^i \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p, \end{aligned}$$

donde para obtener la última línea hemos usado el hecho de que  $\left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p$  es una base, por lo que los coeficientes tienen que ser iguales..

Es importante que evaluemos la derivada en el punto  $p \in \mathcal{M}$  porque no hemos dicho que la transformación tiene que ser lineal. Por supuesto, la transformación puede ser ampliamente no lineal (con tal de que la expresión siga teniendo sentido), pero una vez que evaluamos este resultado en un punto obtenemos justamente un número, que es exactamente lo que queremos.

*Observación 5.5.1.* En relatividad especial, se oye a menudo hablar del *espacio vectorial* Minkowsky, es decir el espacio vectorial cuyo conjunto está compuesto de posiciones  $x^\mu$ .

<sup>7</sup>Los componentes de un vector se dan simplemente en relación a las bases, ver Observación 3.7.2.

Esto va en contra de lo que dijimos al principio de la Clase 3 (*"Lecture 3"*): “Queremos enfatizar aquí que *no* vamos a equipar el espacio (tiempo) con una estructura vectorial”. Un contador no sería más que ‘el trabajo de las transformaciones de coordenadas!’, sin embargo las transformaciones consideradas en relatividad especial no son transformaciones generales: las restringimos nosotros a transformaciones lineales, las cuales restringimos aún más a ser transformaciones de Lorentz. Esto parece algo razonable de hacer, pero deberíamos ser capaces de estudiar la relatividad especial en coordenadas polares si queremos <sup>8</sup> Podemos hacer esa transformación (Cartesianas a polares) y las *velocidades* en un punto cambiarán mediante mapas lineales como hemos descrito arriba, pero la posición en el espacio no se transformará linealmente! En otras palabras, equipar el espacio Minkowsky con una estructura vectorial es una sobre estructuración, porque al hacerlo así nos estamos restringiendo a las transformaciones de Lorentz. Esto justamente resalta que las posiciones *no* son vectores, las *velocidades* son los vectores.

## 5.6 Espacios Cotangentes

Hemos construido el espacio tangente como un espacio vectorial, pero nuestro trabajo desde la sesión 3 (*lecture 3*) nos dice que podemos tomar el dual de este espacio.

**Definición** (Espacio Cotangente). Sea  $T_p\mathcal{M}$  un espacio tangente a un punto  $p \in \mathcal{M}$ . El dual de este punto es denominado **espacio cotangente**

$$T_p^*\mathcal{M} \equiv (T_p\mathcal{M})^* := \{\varphi : T_p\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\}.$$

**Definición** (Gradiente de  $f$  en  $p$ ). Sea  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ . Podemos entonces definir el mapa lineal

$$(df)_p : T_p\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}, \quad (df)_p X := X(f).$$

Claramente esto hace de  $(df)_p$  un elemento del espacio cotangente. Es conocido como el **gradiente** de  $f$  en el punto  $p \in \mathcal{M}$ .

*Observación 5.6.1.* Hay que notar que no necesitamos usar una carta para definir el gradiente, tal como se podría pensar en los primeros cursos de grado (*undergraduate classes*)

El gradiente es un tensor-(0, 1) en el espacio vectorial  $T_p\mathcal{M}$  y entonces podemos encontrar sus componentes con respecto a las bases inducidas por la carta usando el método previamente tratado:

$$((df)_p)_j := (df)_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_p = \partial_j (f \circ x^{-1})|_{x(p)}.$$

**Corolario 5.6.2.** La base inducida por una carta para  $T_p^*\mathcal{M}$  es el conjunto

$$\{(dx^1)_p, \dots, (dx^d)_p\},$$

donde  $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  son los mapas coordenados para la carta  $(U, x)$ .

<sup>8</sup>Ya que, una vez más, la elección de cartas/coordenadas no tiene ningún impacto en la física del mundo real.

*Proof.* Mediante cálculo directo tenemos

$$(dx^i)_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) := \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right)_p = \delta_j^i,$$

que es la base dual de la condición de espacio dual.  $\square$

### 5.7 Cambio de Componentes de un Covector Bajo un Cambio de Carta

Igual que con el vector arriba, el covector en sí permanece invariante bajo el cambio de cartas (es un tensor!), pero los *componentes* cambian bajo el cambio de carta. Procediendo de forma análoga al cálculo del componente del vector obtenemos: si  $\omega \in T_p^* \mathcal{M}$  and  $(U, x)$  y  $(V, y)$  son las dos cartas, entonces

$$\omega_{(y)j} = \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)_p \omega_{(x)i}.$$

Nótese que aquí la fracción está dada vuelta con respecto a los componentes del vector (es decir que  $x$  e  $y$  han cambiado de lugar). Esto refleja el hecho de que  $\omega$  es un covector y por eso sus componentes se transforman inversamente a los componentes de un vector. Esto resalta un punto importante que ya hemos insinuado algunas veces: no debemos pensar en el gradiente como un vector. Es un covector y así lo demuestran sus propiedades de transformación. Par un mayor convencimiento, si fuese un vector, cabría esperar que se transformase bajo la regla de la cadena (*chain rule*) pero esto nos daría

$$((df)_p)_{(x)i} = \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p = \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p \left( \frac{\partial f}{\partial y^j} \right)_p = \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p ((df)_p)_{(y)j},$$

lo cual es una contradicción en el resultado!

#### Ejercicio

Mostrar que la propiedad de transformación anterior es verdadera.

*Pista:* Escribir  $\omega = \omega_{(x)i} (dx^i)_p$

Hay una regla general para comprobar que las propiedades de transformación son correctas: mirar en el lado izquierdo y observar la ubicación de los índices (plural para el caso de tensores de orden superior) y a qué etiquetado de bases corresponden ( $x$  o  $y$ ). Cada índice inferior se convierte en un índice denominador en la fracción y viene con la etiqueta de base relevante. Escribimos entonces el componente en la nueva coordenada (es decir  $\omega_{(x)i}$ ) y entonces, como no había  $x$  o  $i$  en el lado izquierdo, usamos la convención de sumación de Einstein para removerlo del lado derecho colocándolo en el numerador. Cuando se consideran tensores de orden superior, simplemente hay que asegurarse de que emparejamos los índices correctos entre sí: por ejemplo

$$T_{(x)}^{ij} = \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right)_p \left( \frac{\partial x^j}{\partial y^\ell} \right)_p T_{(y)}^{k\ell},$$

donde los primeros índices ( $i$  y  $k$ ) están emparejados y los segundos índices ( $j$  y  $\ell$ ) también están emparejados. Veremos esta regla de manera más general un poco más adelante, cuando consideremos el cambio de componentes de tensores .

## 6 | Campos

Hasta ahora hemos tratado un único espacio tangente y vectores que reposan en él. Lo que ahora queremos estudiar son los *campos* vectoriales, lo cual esencialmente se traduce en un vector para cada punto en la variedad. Tenemos que dar una vía técnica apropiada para introducir los campos vectoriales, ya que decir simplemente ‘imaginemos un vector en cada punto’ no es suficiente (dos personas podrían imaginarlo de forma diferente). La respuesta para llevarlo a cabo es conocida como *teoría de paquetes o de haces* ("theory of bundles") o *de haces de fibras* ("fiber bundles").

### 6.1 Haces, Fibras y Secciones

**Definición** (Haz/Paquete). Un **haz** (suave) es una tripleta  $(E, \pi, \mathcal{M})$  donde  $E$  y  $\mathcal{M}$  son variedades suaves conocidas como el *espacio total* y el *espacio base*, respectivamente.  $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$  es un mapa sobreyectivo, suave, conocido como el *mapa de proyección*.

*Notación.* Es usual también indicar un haz en la siguiente notación  $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ . Es importante saber, sin embargo, que el haz es la tripleta completa y no justo el mapa, como podría interpretarse usando esta notación.

**Definición** (Fibra sobre  $p$ ). Sea  $(E, \pi, \mathcal{M})$  un haz. Definimos la **fibra sobre**  $p \in \mathcal{M}$  como  $\text{preim}_{\pi}(p)$ .

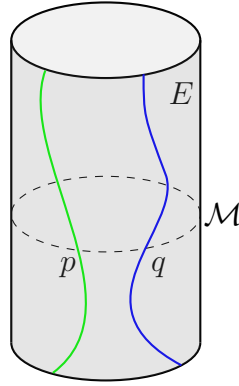
**Definición** (Section). Una **sección**,  $\sigma$ , de un haz  $(E, \pi, \mathcal{M})$  es un mapa  $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow E$  tal que  $(\pi \circ \sigma) = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ , es la identidad en  $\mathcal{M}$ .

Como veremos enseguida, las secciones son campos sobre las variedades. La idea aproximada es que hacemos las fibras los espacios tangente en cada punto y a continuación tomando una sección, cogemos un vector de cada espacio tangente, y obtenemos un campo vectorial.

*Ejemplo 6.1.1.* En mecánica cuántica, se dice que pensemos en las funciones de onda como una función. Esto no es técnicamente verdad. La función de onda es un campo escalar en el espacio base, y un campo escalar no es una función (a pesar de nosotros puede haber que piense que sí). Más técnicamente, la función de onda es una sección sobre un haz de línea- $\mathbb{C}$  (es decir, un haz cuyas fibras son la línea compleja). Esto es realmente una distinción importante cuando vamos a estudiar mecánica cuántica en coordenadas curvas tal como la derivada covariante<sup>1</sup> actúa de una manera no-trivial en las secciones.

---

<sup>1</sup>Que veremos más adelante.



**Figura 6.1:** Ejemplo de un haz y fibra. El espacio total,  $E$ , es la superficie del cilindro y el espacio base,  $M$ , es el anillo. El haz es la tripleta consistente en  $E$ ,  $M$  y un mapa suave de proyección sobreyectiva  $\pi : E \rightarrow M$ . La preimagen del punto  $p$  con respecto al mapa de proyección  $\pi$  es la línea verde — es decir  $\pi$  mapea cada punto de la línea verde  $p$  — conocido como la fibra sobre  $p$ . De forma similar la línea azul es la fibra sobre  $q$ . La sección con respecto a  $p$ ,  $\sigma_p : M \rightarrow E$ , mapea  $p$  a un punto dentro de su fibra (un punto en la línea verde). Un mapa  $\tau : M \rightarrow E$  que mapea  $p$  a un punto en la fibra de  $q$  (la línea azul) no es una sección, ya que  $(\pi \circ \tau)(p) = q \neq \mathbb{1}_M(p)$ . La sección completa es el conjunto de puntos formado tomando un punto de cada fibra.

## 6.2 Haz Tangente de una Variedad Suave

Sea  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  una variedad suave. Definimos el **haz tangente** como el haz cuyo espacio base está en la variedad y cuyo espacio total tiene el conjunto <sup>2</sup>

$$TM := \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M,$$

donde el punto significa ‘unión disjunta’. El mapa de proyección viene dado por

$$\pi : X \mapsto p,$$

donde  $p$  es el *único* punto tal que  $X \in T_p M$ .

Necesitamos mostrar como convertir el conjunto de arriba  $TM$  en una variedad suave (ya que la necesitamos para un haz), pero antes veamos dos comentarios rápidos: es importante que tomemos la unión disjunta de arriba ya que esto nos permite identificar cada vector con su punto base  $p$ . Al tomar la unión disjunta es cuando podemos decir punto *único*; y la proyección es sobreyectiva porque hemos tomado la unión sobre todos los  $p \in M$  y así alcanzamos cada elemento en  $M$ .

Ahora tenemos que convertir  $TM$  en una variedad suave, de tal manera que  $\pi : TM \rightarrow M$  sea un mapa suave. Necesitamos entonces definir una topología en  $TM$ , la pregunta es ‘cómo lo hacemos?’ Pensándolo un poco la respuesta es clara: ya tenemos una topología en nuestro espacio base y vamos a requerir que  $\pi$  sea suave, por qué no usar justo la más tosca <sup>3</sup> topología

<sup>2</sup>haremos esto en una variedad suave a continuación.

<sup>3</sup>Recordemos que la más “tosca” significa que tiene el mínimo número de elementos para que  $\pi$  sea *justo* continua.



en  $T\mathcal{M}$  tal que  $\pi$  sea continua? (ya que la continuidad es necesaria para la suavidad). Esta topología es conocida como **topología inicial con respecto a  $\pi$** . Se define simplemente como <sup>4</sup>

$$\mathcal{O}_{T\mathcal{M}} := \{\text{preim}_\pi(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$$

Hasta ahora tenemos una variedad topológica  $(T\mathcal{M}, \mathcal{O}_{T\mathcal{M}})$  y un mapa continuo  $\pi$  a una variedad suave  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ . Ahora necesitamos definir un atlas- $C^\infty$  para  $(T\mathcal{M}, \mathcal{O}_{T\mathcal{M}})$  de manera que nuestro mapa sea continuo. Al igual que con la topología, vamos a construir este mapa a partir de  $\mathcal{A}$ .

La pregunta es ‘cómo?’ Bien, sabemos que  $X \in T\mathcal{M}$  está descrito por dos piezas de información: es un vector y tiene un punto base. Podemos obtener fácilmente las coordenadas del punto base proyectando  $X$  usando  $\pi$  y a continuación usando el atlas en  $\mathcal{M}$  para encontrar sus coordenadas. Y con respecto a la parte del vector? Bien, tenemos una carta en  $\mathcal{M}$  y así podemos inducir una carta en el espacio tangente y descomponer  $X$  como

$$X =: X_{(x)}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Son los componentes  $X_{(x)}^i$  los que queremos usar, pero los queremos simplemente usando el mapa  $(U, x)$ . La respuesta es muy sencilla: consideremos justo el gradiente de los mapas de la carta. Es decir

$$X_{(x)}^i = (dx^i)_{\pi(X)}(X).$$

Y así construimos el atlas

$$\mathcal{A}_{T\mathcal{M}} := \{(TU, \xi_x) \mid (U, x) \in \mathcal{A}\},$$

donde

$$\xi_x : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2 \cdot \dim \mathcal{M}},$$

dado por

$$\xi_x(X) = \left( \underbrace{(x^1 \circ \pi)(X), \dots, (x^d \circ \pi)(X)}_{(U, x)\text{-coordenada de } \pi(X)}, \underbrace{(dx^1)_{\pi(X)}(X), \dots, (dx^d)_{\pi(X)}(X)}_{\text{Componentes del vector con respecto a } (U, x)} \right)$$

Necesitamos también el mapa inverso:

$$\xi_x^{-1} : \mathbb{R}^{2 \cdot \dim \mathcal{M}} \rightarrow TU.$$

Pensando un poco es claro que debe satisfacer

$$\xi_x^{-1}(\alpha^1, \dots, \alpha^d, \beta_1, \dots, \beta^d) := \beta^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x^{-1}(\alpha^1, \dots, \alpha^d)} = \beta^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\pi(X)}.$$

---

<sup>4</sup>En el tutorial mostramos que  $\mathcal{O}_{T^*\mathcal{M}}$  es una topología para el haz cotangente. Se puede insertar aquí una demostración análoga para mostrar que  $\mathcal{O}_{T\mathcal{M}}$  es también una topología.

Ahora necesitamos comprobar que estos mapas son suaves (ya que necesitamos un atlas suave). Consideremos otra carta  $(V, y)$  con  $V \cap U \neq \emptyset$ , tenemos<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} (\xi_y \circ \xi_x^{-1})(\alpha^1, \dots, \alpha^d, \beta^1, \dots, \beta^d) &:= \xi_y \left( \beta^m \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)_{\pi(X)} \right) \\ &= \left( \dots, (y^i \circ \pi) \left( \beta^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\pi(X)} \right), \dots, (dy^i)_{\pi(X)} \left[ \left( \beta^m \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)_{\pi(X)} \right) \right], \dots \right) \\ &= \left( \dots, (y^i \circ x^{-1})(\alpha^1, \dots, \alpha^d), \dots, \beta^m \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^m} \right)_{\pi(X)}, \dots \right) \\ &= \left( \dots, (y^i \circ x^{-1})(\alpha^1, \dots, \alpha^d), \dots, \beta^m \partial_m (y^i \circ x^{-1})|_{(\alpha^1, \dots, \alpha^d)}, \dots \right), \end{aligned}$$

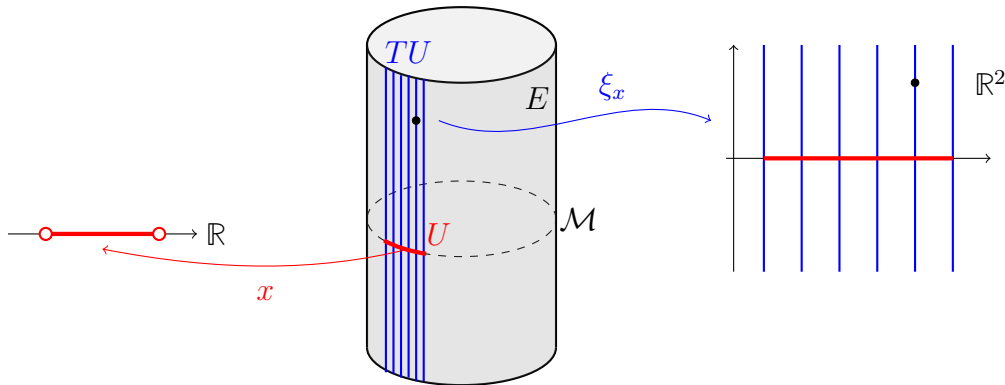
Donde para ir a la tercera línea hemos usado el hecho de que  $\pi(X) = p = x^{-1}(\alpha^1, \dots, \alpha^d)$  y para obtener la última línea hemos usado la definición para la fracción derivada junto con  $(x \circ \pi)(X) = x(p) = (\alpha^1, \dots, \alpha^d)$ . Ahora  $(y^i \circ x^{-1})$  es suave porque  $\mathcal{A}$  es suave y por lo tanto el resultado de arriba es suave. Por lo tanto ya tenemos un atlas suave  $\mathcal{A}_{T\mathcal{M}}$ .

**Definición** (Haz Tangente). La tripleta  $(T\mathcal{M}, \pi, \mathcal{M})$  es un haz, conocido como el **haz tangente**.

Todo esto parece más bien abstracto y complicado, pero el siguiente ejemplo muestra que es más bien natural e intuitivo.

*Ejemplo 6.2.1.* Sea  $\mathcal{M} = S^1$  (un círculo) y las fibras yendo rectas de arriba abajo. Cuanto más lejos se va la fibra, mayor es el valor del vector, y yendo hacia abajo corresponde a colocar un signo menos delante del vector.

$U$  aquí es una pequeña parte del círculo y está mapeada por  $x$  a un intervalo abierto en la línea real.  $TU$  es el conjunto de fibras que van a través de  $U$ . Están mapeadas vía  $\xi_x$  a  $\mathbb{R}^2$  de la siguiente manera: consideremos un punto en una de las fibras, y lo llamamos  $X$ . El valor del eje horizontal en la carta  $\mathbb{R}^2$  está dado por el valor que el punto base  $p = \pi(X) \in \mathcal{M}$  toma en la carta  $\mathbb{R}$ , tal como ha sido mapeado por  $x$ . El valor vertical en la carta  $\mathbb{R}^2$  está dado por el tamaño del vector (al ser unidimensional el componente es el tamaño) y es trazado en consecuencia. Es decir, el eje vertical es la ‘longitud del vector’, de nuevo con el eje negativo correspondiendo a un vector que está más abajo que el punto base en la fibra.



<sup>5</sup>Vaya, esto no parece muy elegante. Demasiados paréntesis e índices!

### 6.3 Campos Vectoriales

Acabamos de dedicar mucho trabajo para comprobar/demostrar que el conjunto  $T\mathcal{M}$  puede ser hecho en una variedad suave y así tenemos un haz. Parece razonable preguntarse por qué hicimos un cálculo tan loco. La respuesta está en que eso nos permite la siguiente definición.

**Definición** (Campo Vectorial Suave). Un **campo vectorial suave** es una *sección suave* en el haz tangente. Es decir

$$\chi : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}, \quad \pi \circ \chi = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}.$$

*Observación 6.3.1.* Nótese que hemos usado aquí la letra griega  $\chi$  para indicar un campo vectorial suave. Hacemos esto para hacer la distinción entre un vector  $X \in T_p\mathcal{M}$  y un campo vectorial suave  $\chi$ . Seguiremos usando letras griegas para los campos (en general, por lo que también usaremos letras griegas para los campos de covectores y los campos tensoriales) en esta sesión.<sup>6</sup> Como vamos a ver enseguida, también introducimos una nueva notación para la acción de campos vectoriales suaves. Señalaremos esto cuando los expliquemos.

Todo el trabajo ha sido para la parte suave de la definición anterior. Intuitivamente, cuando pensamos en un campo vectorial (un vector en cada punto) lo que vemos es un campo vectorial suave, es decir un campo en el que los vectores parecen fluir naturalmente de uno a otro, más que simplemente apuntar al azar en cada punto. Los campos vectoriales suaves van a jugar un papel vital en la relatividad general: la velocidad de una partícula es un campo vectorial suave en la variedad que es la línea del mundo ("*world line*") de la partícula. Si este campo vectorial no fuese suave, correspondería a la velocidad de la partícula cambiando súbitamente, lo cual ya sabemos que no es físico.

### 6.4 El Módulo- $C^\infty(\mathcal{M})$

Hemos visto hasta ahora una definición de un campo vectorial suave, pero no tenemos manera de sumarlos juntos o escalarlos ("*scaling*") de alguna forma. Esto es algo que sin duda queremos ser capaces de hacer, así que queremos intentarlo y hacerlo en un espacio vectorial sobre un campo. La suma es sencilla, simplemente sumar los vectores juntos en los espacios tangentes y tomar el resultado como el nuevo vector en ese punto. Y para el escalado? Es claro que no queremos limitarnos a escalar uniformemente el campo vectorial suave  $\mathcal{M}$  sino que pueda tomar diferentes valores en cada punto. Esto es justamente un campo escalar, así que vamos a intentarlo y convertir el conjunto de secciones suaves sobre un haz tangente en un espacio vectorial- $C^\infty(\mathcal{M})$ . Sin embargo hay un problema. Recordemos la definición

$$C^\infty(\mathcal{M}) := \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es una función suave}\}.$$

Es posible que un elemento de<sup>7</sup>  $C^\infty(\mathcal{M})$  que no desaparece (*non-vanishing*) pueda desvanecerse en algunos puntos, es decir hay puntos  $p \in \mathcal{M}$  que son mapeados a  $0 \in \mathbb{R}$ . No podemos convertir  $C^\infty(\mathcal{M})$  en un campo, entonces, ya que no tenemos un inverso bajo multiplicación para cada elemento (no podemos invertir los puntos que desaparecen!). Lo mejor que podemos

<sup>6</sup>Cambiaremos de opinión en la próxima sesión!

<sup>7</sup>Es decir que no mapea cada punto  $p \in \mathcal{M}$  a  $0 \in \mathbb{R}$ .

hacer es convertirlo en un *anillo* (*ring*). Claramente tenemos un elemento neutro – los elementos que simplemente mapean  $p \in \mathcal{M}$  a  $1 \in \mathbb{R}$  – y podemos definir la conmutatividad puntual, usando el hecho de que  $(\mathbb{R}, +)$  es conmutativa. Obtenemos por lo tanto un *anillo unitario, conmutativo*. Si construimos sobre dicho anillo, obtenemos un *módulo*.

**Definición** (El Módulo- $C^\infty(\mathcal{M})$ ,  $\Gamma T\mathcal{M}$ ). La tripleta  $(\Gamma T\mathcal{M}, \oplus, \odot)$  es un módulo- $C^\infty(\mathcal{M})$  donde

$$\Gamma T\mathcal{M} := \{\chi : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M} \mid \text{sección suave}\},$$

y

$$\begin{aligned} (\chi \oplus \tilde{\chi})\langle f \rangle &:= \chi\langle f \rangle + \tilde{\chi}\langle f \rangle, \\ (g \odot \chi)\langle f \rangle &= g \cdot \chi\langle f \rangle, \end{aligned}$$

donde  $+/\cdot$  son la adición/multiplicación en  $C^\infty(\mathcal{M})$ .

Este es el primer punto donde hemos introducido una nueva notación para la acción de un campo. Recordemos que hemos estado señalando la acción de un vector (en un punto) en una función  $C^\infty(\mathcal{M})$  mediante paréntesis estándar,  $X(f)$ . Con objeto de distinguir esta acción de la de un campo vectorial suave en  $f$ , usamos paréntesis angular  $\chi\langle f \rangle$ .<sup>8</sup> Esto podría parecer simplemente una cuestión de notación, sin embargo guarda un punto importante: un campo vectorial suave es un mapa  $\chi : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ , entonces, cómo puede actuar en un campo escalar? La respuesta es obviamente a través de los vectores que componen  $\chi$ :

$$\chi\langle f \rangle|_p := (\chi(p))(f).$$

Es decir, primero evaluamos  $\chi(p)$ , el cual nos da el  $X \in T_p\mathcal{M}$ , y a continuación le dejamos actuar en el campo escalar, dando un número real. Hacemos esto para cada punto  $p \in \mathcal{M}$  y así obtenemos un mapa que asocia cada punto a un número real, y esto es un campo escalar. En otras palabras, podemos pensar en campos vectoriales suaves como mapas

$$\chi : C^\infty(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} C^\infty(\mathcal{M}).$$

Es por esto que tomamos la adición/multiplicación por el lado derecho de las expresiones en la definición para que estén definidas en  $C^\infty(\mathcal{M})$ .

---

<sup>8</sup>Usamos esta elección particular de notación porque es la que yo aprendí en la Universidad.

Ejercicio

Mostrar que el mapa  $\chi : C^\infty(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} C^\infty(\mathcal{M})$  es  $\mathbb{R}$ -lineal. Es decir, para  $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\chi\langle f + g \rangle &= \chi\langle f \rangle + \chi\langle g \rangle, \\ \chi\langle \lambda \cdot f \rangle &= \lambda \cdot \chi\langle f \rangle.\end{aligned}$$

Mostrar también que cumple

$$\chi\langle f \bullet g \rangle = f \bullet \chi\langle g \rangle + \chi\langle f \rangle \bullet g,$$

donde  $\bullet : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$  es la multiplicación en el anillo. Esta propiedad es conocida como la **regla de Leibniz**.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Nótese que para ecuaciones en diferenciales parciales es la familiar regla del producto.

Veamos ahora un hecho importante en la teoría de conjuntos,<sup>9</sup> que cada espacio vectorial tiene una base. Sin embargo, este increíblemente hecho útil no es aplicable a los módulos. Es decir, en general, *no podemos* tomar simplemente el subconjunto

$$\{\chi_1, \dots, \chi_d\} \subseteq \Gamma T\mathcal{M}$$

tal que cualquier otro  $\chi \in \Gamma T\mathcal{M}$  pueda ser expresado como una combinación lineal de este subconjunto

$$\chi = f^i \odot \chi_i.$$

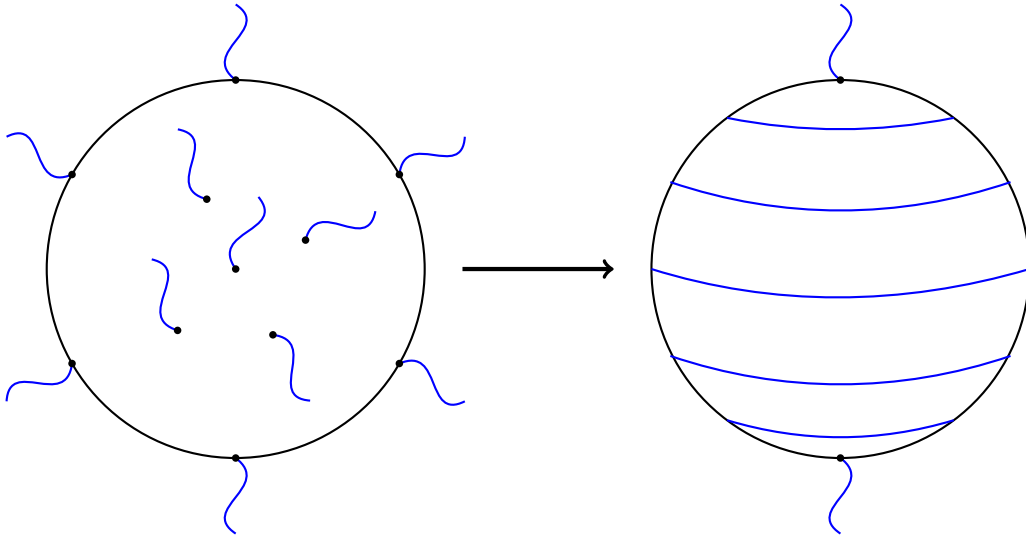
Por supuesto podemos hacer esto *localmente*, simplemente descomponiendo los campos vectoriales localmente, pero no podemos hacerlo *globalmente*.

Ejemplo 6.4.1. Consideremos un campo vectorial suave en una pelota. Si imaginamos este campo vectorial suave como pelos saliendo de la pelota, la idea de tener globalmente definido un campo vectorial suave que no se desvanece en ninguna parte sería "peinar" los pelos planos y paralelos a la superficie. Es decir, queremos que todos los vectores estén tendidos en los espacios tangentes y no "saliendo hacia afuera".

Sin embargo, para hacer esto, tendríamos que remover parte de los pelos: por ejemplo en el diagrama dibujado abajo, los pelos en la parte superior y en la inferior tendrían que "desaparecer" si quisiéramos que la pelota sea suave.

El hecho de que el campo vectorial no esté definido globalmente significa que posiblemente no pueda ser un elemento base. Por supuesto podríamos tener otro campo vectorial que iría "de arriba-abajo" en la esfera definida en los polos Norte y Sur, pero esto no nos permitiría definir *ningún* campo vectorial en esos puntos — cómo podríamos representar un vector que apuntase al Este desde el polo Norte?

<sup>9</sup>Estrictamente hablando tenemos que usar la teoría de conjuntos ZFC, porque necesitamos el axioma de la elección ("*Axiom of Choice*") Para más información véanse las clases del Dr. Schuller sobre Anatomía Geométrica de la Física Teórica.



El fallo al definir un campo vectorial suave, que no se desvanece en ningún punto, está relacionado con el hecho de que no es posible trazar el espacio usando una sola carta (gráfico). Es decir, el atlas mínimo para una esfera contiene dos cartas. Por ejemplo, si usáramos coordenadas polares en la superficie para graficar (representar) la esfera, los polos Norte y Sur no serían graficados – cuál sería el valor de la longitud en esos puntos?

Podemos repetir todo lo que hicimos para definir el haz tangente (*"the tangent bundle"*) pero empezando desde el espacio cotangente  $(T^*\mathcal{M}, +, \cdot)$ . Haciendo esto conseguimos el haz cotangente y los campos covectores suaves (*"smooth covector fields"*). Finalmente obtenemos el módulo- $C^\infty(\mathcal{M})$   $(\Gamma T^*\mathcal{M}, \oplus, \odot)$  donde

$$\Gamma T^*\mathcal{M} := \{\alpha : \mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M} \mid \text{sección suave}\}.$$

*Ejemplo 6.4.2.* Recordemos que teníamos el gradiente en el punto  $(df)_p : T_p\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ . Ahora queremos extenderlo a toda la variedad. Por lo tanto definimos

$$df : \Gamma T\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} C^\infty(\mathcal{M})$$

mediante<sup>10</sup>

$$df : \chi := \chi \langle f \rangle.$$

La linealidad aquí es realmente lineal- $C^\infty$ .<sup>11</sup> Es distinto de los campos vectoriales suaves, los cuales sólo son lineal- $\mathbb{R}$ .

### Ejercicio

Mostrar que el mapa  $df : \Gamma T\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} C^\infty(\mathcal{M})$  es de hecho lineal- $C^\infty$ . Es decir, para todo  $\chi, \Upsilon \in \Gamma T\mathcal{M}$  y  $g \in C^\infty(\mathcal{M})$ ,

$$df : (\chi \oplus \Upsilon) = (df : \chi) + (df : \Upsilon)$$

$$df : (g \odot \chi) = g \cdot (df : \chi).$$

<sup>10</sup>Hemos usado la notación dada por el profesor, es decir indicamos la acción de  $df$  en  $X$  mediante dos puntos  $(:)$  y la acción de un campo vectorial sobre un campo escalar mediante paréntesis angulares  $\langle \rangle$ .

<sup>11</sup>Esto es a menudo denominado lineal- $f$ , por razones obvias.

## 6.5 Campos tensores

Tenemos, pues, los campos vectoriales suaves y los campos covector suaves. Ahora podemos, por lo tanto, construir campos *tensor* suaves.

**Definición** (Campo Tensor Suave). Un **campo tensor- $(r, s)$  suave** es un mapa multilinear  $C^\infty(\mathcal{M})$

$$T : \underbrace{\Gamma T^* \mathcal{M} \times \dots \times \Gamma T^* \mathcal{M}}_{r\text{-términos}} \times \underbrace{\Gamma T \mathcal{M} \times \dots \times \Gamma T \mathcal{M}}_{s\text{-términos}} \xrightarrow{\sim} C^\infty(\mathcal{M}),$$

o en otra notación

$$T := \underbrace{\Gamma T \mathcal{M} \otimes \dots \otimes \Gamma T \mathcal{M}}_{r\text{-términos}} \times \underbrace{\Gamma T^* \mathcal{M} \otimes \dots \otimes \Gamma T^* \mathcal{M}}_{s\text{-términos}}.$$

*Observación 6.5.1.* Nótese que en la segunda notación, el signo  $\otimes$  significa ahora un mapa a  $C^\infty(\mathcal{M})$ , no sólo a  $\mathbb{R}$ , como así fue al definirlo por primera vez. Este es el gran inconveniente de esta notación: la gente usa el mismo símbolo de producto tensor para todas las operaciones que parecen similares.<sup>12</sup>

Aunque la dos definiciones anteriores no parecen coincidir del todo. Hemos visto que  $\alpha \in \Gamma T^* \mathcal{M}$  puede mapear un  $X \in \Gamma T \mathcal{M}$  a una función- $C^\infty(\mathcal{M})$ , pero lo contrario no es cierto — los campos vectoriales mapean campos escalares a campos escalares — cómo hacemos entonces para que funcione la definición de producto tensorial ("*tensor product*")? La respuesta es simplemente que lo interpretemos como lo destaca este ejemplo.

*Ejemplo 6.5.2.* Sea  $T$  un campo tensorial- $(1, 1)$  suave dado por  $T = X \otimes \alpha$ . Su acción como mapa es dada por

$$T(\beta, Y) = (X \otimes \alpha)(\beta, Y) := (\beta : X) \otimes (\alpha : Y) = (\beta : X) \bullet (\alpha : Y),$$

para  $\beta \in \Gamma T^* \mathcal{M}$ ,  $Y \in \Gamma T \mathcal{M}$  y donde hemos usado el hecho de que el producto tensor de dos campos escalares es justo su multiplicación,  $\bullet$ .

*Observación 6.5.3.* De aquí en adelante diremos simplemente campo vector/covector/tensor cuando nos refiramos a un campo *suave*. Es simplemente para aligerar la cantidad de palabras.

<sup>12</sup>Como ejemplos, ver el capítulo 14 de mis notas del curso de Quantum Theory del Dr. Schuller.

## 7 | Conexiones

Hasta ahora, todo lo que hemos desarrollado ha sido algo que hemos introducido a mano, p. ej. hemos proporcionado una topología en nuestro conjunto (*set*). Como veremos más adelante en el curso, las ecuaciones de Einstein nos darán en realidad conexión<sup>1</sup> para nuestra variedad (*manifold*), y por eso es la física que proporciona esta estructura. Sin embargo, seguiremos adelante en un sentido matemático y definiremos las conexiones de esta manera

Observación 7.0.1. Realmente en lo que estamos interesados es en las llamadas derivadas covariantes, las cuales son técnicamente algo diferentes de las conexiones. Sin embargo, esta diferencia no se manifestará aquí, por lo que utilizaremos ambos términos de manera intercambiable.

Notación. Vamos a deshacer la notación sobre el etiquetado de los campos vectoriales ("*Vector fields*") mediante letras griegas y usaremos simplemente  $X, Y, Z$  para los campos vectoriales. Hacemos esto porque en adelante solo consideraremos campos vectoriales desde este punto de vista. Si usamos un vector en algún punto, quedará claro que usaremos la notación para la acción de un vector (que está entre paréntesis normales) mientras que para los campos vectoriales seguiremos usando la notación de paréntesis angulares.

Hasta ahora hemos visto que un campo vectorial  $X$  puede ser usado para proporcionar una derivada direccional  $X\langle f \rangle$  de una función  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ . Para acordarnos de que estamos tratando con derivadas direccionales, introduciremos una nueva notación

$$\nabla_X f := X\langle f \rangle.$$

Esto realmente parece una notación masiva excesiva: tenemos tres expresiones equivalentes,

$$\nabla_X f = X\langle f \rangle = df : X.$$

Sin embargo, aunque las evaluaciones son iguales, los tres objetos son diferentes como mapas. Es decir

$$\begin{aligned} X : C^\infty(\mathcal{M}) &\xrightarrow{\sim} C^\infty(\mathcal{M}), \\ df : T\mathcal{M} &\xrightarrow{\sim} C^\infty(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Con respecto a  $\nabla_X$ , que como un mapa

$$\nabla_X : C^\infty(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} C^\infty(\mathcal{M}),$$

parece ser exactamente lo mismo que  $X$ . Es cierto, pero resulta que realmente podemos extender la definición de  $\nabla_X$  para que sea un mapa de un campo tensor- $(r, s)$  a un campo tensor- $(r, s)$ , lo cual  $X$  no puede hacer.

---

<sup>1</sup>En realidad es un camino un poco más largo, vía la llamada métrica, pero ya veremos todo esto



## 7.1 Derivadas Direccionales de Campos Tensores

Formulamos una lista de deseos de las propiedades que debería tener  $\nabla_X$  actuando en un campo tensorial. Esta lista de deseos podría no dar una única forma para  $\nabla_X$  y puede haber muchos objetos de este tipo que satisfagan las condiciones de nuestra lista de deseos. Será por tanto importante ejercitarnos en la forma de parametrizar esas estructuras de manera que podamos escoger la mejor para las circunstancias que estamos considerando.

**Definición** (Conexión/Derivada Covariante). Una **conexión** lineal  $\nabla$  en una variedad suave  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  es un mapa que toma un par consistente en un vector (campo)  $X$  y un campo tensor  $T$   $-(r, s)$  y los envía a un (campo) tensor  $\nabla_X T$   $-(p, q)$ , que cumple:<sup>2</sup> para toda  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$  y campos tensores  $T, S$   $-(r, s)$

- (i) Acción en escalares;  $\nabla_X f := X\langle f \rangle$ ,
- (ii) linealidad-+ en los campos tensores;  $\nabla_X(T + S) = \nabla_X T + \nabla_X S$ ,
- (iii) Leibniz; p.ej. si  $T$  es un campo tensor  $(1, 1)$ , y  $\omega \in \Gamma T^* \mathcal{M}, Y \in \Gamma T \mathcal{M}$ ,

$$\nabla_X(T(\omega, Y)) = (\nabla_X T)(\omega, Y) + T(\nabla_X \omega, Y) + T(\omega, \nabla_X Y).$$

Esto se extiende naturalmente a los tensores de orden superior, y

- (iv) linealidad- $f$  en el campo vector;  $\nabla_{f \cdot X + Y} T = f \nabla_X T + \nabla_Y T$ .

*Observación 7.1.1.* El (campo) entre paréntesis en la definición de arriba se pone porque sólo es posible alimentar  $\nabla$  con un vector (no con un campo vectorial) y obtener simplemente un tensor definido en el mismo punto que el vector. Esto es importante aunque siempre alimentamos un campo tensor. Esto es simplemente la extensión del hecho que  $X(f) \in \mathbb{R}$  mientras que  $X\langle f \rangle \in C^\infty(\mathcal{M})$ .

Lo que la nota de arriba realmente enfatiza es lo que la derivada covariante hace. Recordemos que la derivada de algo corresponde a “comparar como ese algo cambia a medida que avanzamos”. Si queremos tomar alguna forma de derivada de un campo tensorial, entonces, obviamente tiene que estar definido en más de un punto (de manera que podamos tener dos valores para comparar). Por eso tiene que ser un campo. La entrada inferior, sin embargo, siempre nos dice la *dirección* en la queremos tomar esa derivada, y por eso Podemos considerar un solo vector. Por eso la derivada covariante pregunta “cómo varía  $T$  a medida que se mueve a lo largo de  $X$ ?” Si usamos solo un vector, el resultado que obtenemos nos dice cómo cambia  $T$  a lo largo de  $X$  *en ese punto*. Sin embargo, si usamos un campo vectorial, lo que obtenemos es cómo varía  $T$  a lo largo del campo vectorial  $X$  y de esa manera el resultado es un campo.

Más adelante veremos una estructura de derivada diferente, la derivada de Lie, que requiere conocer *ambos*  $T$  y  $X$  en una vecindad y por eso no funciona para  $X$  como vector.

<sup>2</sup>Asumimos que esto es un campo vectorial por la notación usada en estas condiciones. Para un vector simplemente remplazar el paréntesis angular por el normal y remplazar  $f$  en la condición (iv) por  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Ejercicio

La condición (iii) se da también de forma diferente. Así

$$\nabla_X(S \otimes R) = (\nabla_X S) \otimes R + S \otimes (\nabla_X R).$$

Esto hace que el nombre Leibniz <sup>a</sup> parezca más razonable. Probar que la expresión de arriba puede ser derivada de la condición (iii).

*Pista:* Sea  $T = W \otimes y$  para  $W \in \Gamma T\mathcal{M}$  e  $y \in \Gamma^* T\mathcal{M}$  y a continuación usar el resultado

$$\nabla_X(\omega : W) = (\nabla_X \omega) : W + \omega : (\nabla_X W),$$

que se obtiene de aplicar la condición (iii) a un campo covector.

---

<sup>a</sup>Recordemos que Leibniz básicamente significa una extensión de la regla del producto.

### Ejercicio

Mostrar que las condiciones (ii)-(iv) se satisfacen para un campo tensor- $(0,0)$ , es decir para una  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ .

*Pista:* Usar el hecho de que  $f \otimes g = f \bullet g$ , donde  $\bullet$  es la multiplicación en el anillo.

*Nota,* si ha solucionado los otros ejercicios básicamente está hecho!

*Pista 2:* Si está atascado, esta cuestión está resuelta en el tutorial.

*Observación 7.1.2.* Hemos mostrado/argumentado que  $\nabla_X$  es la extensión de la acción de  $X$ , por lo que es natural hacer la pregunta ‘qué es  $\nabla$  en sí misma?’ La respuesta es simplemente que es la extensión de  $d$ . Vemos esto directamente de  $\nabla_X f = X\langle f \rangle = df : X$ .

**Definición** (Variedad Afín ("Affine manifold")). Decimos que una **variedad con conexión**, o **variedad afín**, es la cuádrupla de estructuras  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$ .

## 7.2 Nueva Estructura en $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ requerida para Fijar $\nabla$

La pregunta que queremos responder es si un único o diferentes  $\nabla$ s darán el mismo resultado. En otras palabras, cuánta libertad tenemos al elegir  $\nabla$ ?<sup>3</sup>

Consideremos la acción de un campo vectorial  $X$  en otro campo vectorial  $Y$ . Para poder

---

<sup>3</sup>Hay un debate más genérico y agradable en el libro de Wald, Sección 3.1 (págs 32-34).

hacer el cálculo introducimos una carta  $(U, x)$ .

$$\begin{aligned}
 \nabla_X Y &= \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= X^i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= X \langle Y^j \rangle \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right),
 \end{aligned}$$

Donde hemos usado los axiomas para la conexión a lo largo del camino. Ahora, qué hacemos con el último término? Bien, esto es la derivada covariante de un campo vectorial, y por eso sabemos que debe ser un campo vectorial. Podemos entonces expandir esto en la base inducida por la carta y asignar coeficientes, que llamaremos  $\Gamma^m$ . Estos coeficientes realmente necesitarán unos índices covariantes  $i$  y  $j$  de manera que no sean rotos por el convenio de sumación. Entonces tenemos

$$\left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma_{(x)ji}^m \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Estos coeficientes son denominados las **funciones de coeficiente de conexión** de  $\nabla$  *con respecto a* la carta  $(U, x)$ .<sup>4</sup> Nótese que hemos escrito el índice  $j$  antes que el índice  $i$  arriba, esto es importante destacar ya que, todavía, no tenemos ninguna condición de simetría  $\Gamma_{(x)ji}^m = \Gamma_{(x)ij}^m$ .

Podemos escribirlo mediante la siguiente definición.

**Definición** (Funciones de Coeficiente de Conexión). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$  una variedad afín y sea  $(U, x) \in \mathcal{A}$ . Las **funciones de coeficiente de conexión**, de ahora en adelante simplemente ‘las  $\Gamma$ s’, son las muchas funciones  $(\dim \mathcal{M})^3$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{(x)jk}^i &: U \rightarrow \mathbb{R} \\
 p &\mapsto \left[ dx^i : \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right]_p.
 \end{aligned}$$

Observación 7.2.1. Podemos ver<sup>5</sup> como las dos expresiones para los  $\Gamma$ s son equivalentes imaginando que ‘invierten’ la acción de  $dx^i$  para que así se convierta en una  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  en el lado derecho.

Y ahora, insertando las  $\Gamma$ s en la expresión para  $\nabla_X Y$  y etiquetando de nuevo los índices, podemos expresar el lado derecho como  $(\dots)^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , y así extraer el componente de la derivada. Obtenemos

$$(\nabla_X Y)^i = X \langle Y^i \rangle + X^j Y^k \Gamma_{(x)kj}^i.$$

<sup>4</sup>Nótese el subíndice  $(x)$ , para recordarnos que está definido con respecto a la carta.

<sup>5</sup>Concedido más bien levantando la mano, como se presenta aquí.

Entonces la respuesta a la pregunta cuánta libertad nos queda es  $\Gamma$ s; es decir que podemos decir exactamente qué  $\nabla$  estamos usando diciendo cuáles  $\Gamma$ s. Claramente esto solo funciona en el dominio de la carta  $U \subseteq \mathcal{M}$  y es ahí donde están definidas las  $\Gamma$ s. Ahora se podría decir ‘espera, sólo sabemos que esto sólo nos dará la derivada covariante de un campo vectorial, y la derivada covariante de los diferentes tensores ? Seguramente necesitaremos muchos términos para hallarlas!’ Felizmente la respuesta es que no, y que basta simplemente con conocer las  $\Gamma$ s. Para ver esto, consideremos lo siguiente.

Si quisiéramos resolver la acción en un elemento base de covector  $dx^i$ , podríamos hacer lo mismo de arriba y expandir el resultado en la base. Es decir

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j = \Theta_{(x)ki}^j dx^k,$$

donde las  $\Theta$ s (thetas) están definidas por esta expresión. Queremos mostrar que realmente podemos expresar estas  $\Theta$ s en términos de las  $\Gamma$ s. Para hacer esto, consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( dx^j : \frac{\partial}{\partial x^k} \right) &= \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j \right) : \frac{\partial}{\partial x^k} + dx^j : \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \delta_k^j &= \Theta_{(x)\ell i}^j dx^\ell : \frac{\partial}{\partial x^k} + dx^j : \left( \Gamma_{(x)ki}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right) \\ 0 &= \Theta_{(x)\ell i}^j \delta_k^\ell + \Gamma_{(x)ki}^\ell \delta_\ell^j \\ \Theta_{(x)ki}^j &= -\Gamma_{(x)ki}^j, \end{aligned}$$

y así conocidas las  $\Gamma$ s se puede conocer también la acción de la derivada covariante en un campo covector.

Podemos usar el siguiente nemónico: "cuando actúa en un campo vectorial, obtenemos un signo más, cuando actúa en un covector obtenemos un signo menos." Resumiendo, tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)^i &= X \langle Y^i \rangle + \Gamma_{(x)jk}^i X^k Y^j, \\ (\nabla_X \omega)_i &= X \langle \omega_i \rangle - \Gamma_{(x)ik}^j X^k \omega_j. \end{aligned}$$

Hay que fijarse bien en la colocación de los índices, es muy importante conocer el método de saber qué índice corresponde a qué término (es decir la  $X$  o  $Y$  u  $\omega$ ). Una forma fácil de hacerlo es pensar en la convención de sumación y entonces saber que el índice en lo que estés derivando cambia. Entonces recordar simplemente que el segundo índice inferior de las  $\Gamma$ s siempre corresponde al índice de  $X$ .

Y respecto a los tensores de orden superior? La respuesta obviamente es simplemente usar la regla de Leibniz. Por ejemplo, para un campo tensor  $T$ - (1, 2) tenemos

$$(\nabla_X T)_{jk}^i = X \langle T_{jk}^i \rangle + \Gamma_{(x)m\ell}^i X^\ell T_{jk}^m - \Gamma_{(x)j\ell}^m X^\ell T_{mk}^i - \Gamma_{(x)k\ell}^m X^\ell T_{jm}^i.$$

Cada término es la contribución de uno de los índices en el lado izquierdo. Consideramos esa fórmula de índices y dejamos los otros dos sin tocar.

### Ejercicio

Mostrar que el resultado anterior está obtenido de hecho a partir de la fórmula de Leibniz.

*Pista:* Sea  $T = Y \otimes \omega \otimes \gamma$  para  $Y \in \Gamma T\mathcal{M}$  y  $\omega, \gamma \in \Gamma T^*\mathcal{M}$ .

Observación 7.2.2. Podemos usar las  $\Gamma$ s para definir lo que entendemos por un espacio euclídeo. Sea  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$  equipado con la topología estándar  $\mathcal{O}_{st}$  y un atlas suave  $\mathcal{A}$ . Definimos el espacio euclídeo para que sea esta variedad suave equipada con una conexión de manera que sea posible encontrar una carta  $(U, x) \in \mathcal{A}$  tal que

$$\Gamma_{(x)jk}^i = 0,$$

para todo  $i, j, k \in \{1, \dots, \dim \mathcal{M}\}$ . Nótese que decimos ‘es posible encontrar *una* carta’ tal que esto suceda. Como veremos, sólo porque las  $\Gamma$ s desaparezcan en una carta no significan que también desaparecerán en otra (es decir, no son tensores!). Extenderemos también este concepto del espacio euclídeo para definir la extensión del espaciotiempo conocida como espaciotiempo Minkowski, que es un espaciotiempo intrínsecamente plano. Damos aquí una pista sobre lo que las derivadas covariantes hacen: **detectan la curvatura**.

Notación. (i) De ahora en adelante, salvo que el contexto lo requiera (p.ej. considerando el cambio de cartas), quitaremos el subíndice  $(x)$  de las  $\Gamma$ s para aligerar la notación.

(ii) Y de nuevo, salvo que el contexto lo requiera, usaremos también la notación

$$\nabla_i := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}.$$

**Definición** (Divergencia del Campo Vectorial). Sea  $X$  un campo vectorial en una variedad suave afín  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$ . La **divergencia** de  $X$  es la función

$$\operatorname{div} X := (\nabla_i X)^i.$$

Afirmación 7.2.3. La definición anterior es independiente de la carta.

### 7.3 Cambio de $\Gamma$ s Bajo Cambio de Carta

Hemos definido hasta ahora las  $\Gamma$ s en  $U \subseteq \mathcal{M}$ , y obviamente queremos extender esto para que sea una definición global en todas las  $\mathcal{M}$ . Hacemos esto considerando el solape de cartas y requiere compatibilidad.

Asumamos que tenemos una variedad afín  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$  y consideremos dos carta  $(U, x)$

y  $(V, y)$  con  $U \cap V \neq \emptyset$ . Deseamos relacionar las  $\Gamma$ s en estas cartas.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{(y)jk}^i &:= dy^i : \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \\
 &= \frac{\partial y^i}{\partial x^q} dx^q : \left( \nabla_{\frac{\partial x^p}{\partial y^j}} \frac{\partial x^s}{\partial x^p} \frac{\partial}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial x^s} \right) \\
 &= \frac{\partial y^i}{\partial x^q} dx^q : \left( \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \left[ \frac{\partial}{\partial x^p} \left\langle \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \right\rangle \frac{\partial}{\partial x^s} + \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^p}} \frac{\partial}{\partial x^s} \right) \right] \right) \\
 &= \frac{\partial y^i}{\partial x^q} dx^q : \left( \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \left[ \frac{\partial}{\partial x^p} \left\langle \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \right\rangle \frac{\partial}{\partial x^s} + \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \Gamma_{(x)sp}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right] \right) \\
 &= \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \left( \frac{\partial}{\partial x^p} \left\langle \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \right\rangle \delta_s^q + \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \Gamma_{(x)sp}^m \delta_m^q \right) \\
 &= \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^p} \left\langle \frac{\partial x^q}{\partial y^k} \right\rangle + \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \Gamma_{(x)sp}^q \\
 &= \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial}{\partial y^j} \left\langle \frac{\partial x^q}{\partial y^k} \right\rangle + \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \Gamma_{(x)sp}^q \\
 &= \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial^2 x^q}{\partial y^j \partial y^k} + \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \Gamma_{(x)sp}^q,
 \end{aligned}$$

donde para obtener la penúltima línea hemos usado la regla del cambio de cartas, es decir<sup>6</sup>

$$\frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^p} = \frac{\partial}{\partial y^j},$$

y donde hemos introducido la notación<sup>7</sup>

$$\frac{\partial^2 x^q}{\partial y^j \partial y^k} := \frac{\partial}{\partial y^j} \left\langle \frac{\partial x^q}{\partial y^k} \right\rangle.$$

Nótese que si la expresión fuese simplemente

$$\Gamma_{(y)jk}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \Gamma_{(x)sp}^q,$$

diríamos ‘ah! esto es una transformación de componentes de un tensor-(1,2)’ Sin embargo, este no es el único término, y así vemos que las  $\Gamma$ s *no son tensores*! El segundo término tiene otra implicación muy importante: dado que en él no hay término  $\Gamma_{(x)}$  presente, simplemente porque las  $\Gamma_{(x)}$  se desvanecen, lo que no quiere decir que desaparezcan en otra carta *para la misma variedad*. Es decir, simplemente mediante una transformación no lineal podemos introducir  $\Gamma$ s en nuestro sistema. Esto es de lo que trataba el comentario en la Observación 7.2.2, sólo podemos hablar de la existencia de una carta tal que las  $\Gamma$ s desaparezcan, ya que no desaparecerán en todas las cartas.

<sup>6</sup>Este es un paso importante ya que necesitamos que ambas derivadas sean con respecto a la misma etiqueta de la carta ( $y$ ) de manera que nos permita usar la regla de Schwartz para cambiar el orden de diferenciación.

<sup>7</sup>Obviamente, esta notación es solamente para derivadas parciales, pero recordemos que las fracciones  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  no significan derivadas parciales, significan la expresión que hemos definido antes.

*Observación 7.3.1.* Nótese que en transformaciones lineales (también conocidas como *mapas afines*) las  $\Gamma$ s se comportan como los componentes de un tensor-(1,2) ya que la segunda derivada desaparecerá. Esta es una de las razones por la que la gente opta por limitarse a transformaciones lineales en posición en la relatividad especial.

La condición anterior es nuestra condición de compatibilidad para las regiones solapadas con el fin de que las  $\Gamma$ s puedan ser definidas globalmente. Ya que esto es nuestra condición de compatibilidad de cartas, solamente podremos hacer desaparecer las  $\Gamma$ s *localmente*, es decir, dentro de una carta.<sup>8</sup>

*Observación 7.3.2.* Técnicamente hablando, es la parte simétrica (la que indicamos con paréntesis regular alrededor de los índices simétricos) de las  $\Gamma$ s que no son los componentes de un tensor. La parte antisimétrica  $\Gamma_{(y)[jk]}^i$ , la cual significa

$$\Gamma_{(y)jk}^i = -\Gamma_{(y)kj}^i,$$

son los componentes de un tensor-(1,2). Se ve esto simplemente por el hecho de que

$$\frac{\partial^2 x^q}{\partial y^j \partial y^k} = \frac{\partial^2 x^q}{\partial y^k \partial y^j}.$$

Entonces si tenemos una parte antisimétrica no-desvaneciente para las  $\Gamma$ s no podemos usar una transformación de cartas para removerlo. Resulta que la parte antisimétrica de las  $\Gamma$ s se desvanece cuando tenemos el sistema llamado *libre de torsión* (*torsion free*)<sup>9</sup>. Por tanto, si nos limitamos a cartas libres de torsión, podríamos entonces usar una transformación de cartas para obtener  $\Gamma$ s que desaparecen *localmente*.

## 7.4 Coordenadas normales

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$  una variedad afín arbitraria y sea  $p \in \mathcal{M}$ . Podemos entonces construir una carta  $(U, x) \in \mathcal{A}$  con  $p \in U$  tal que<sup>10</sup>

$$\Gamma_{(x)(jk)}^i(p) = 0.$$

Esto nos indica que podemos hacer desaparecer las  $\Gamma$ s *en el punto*  $p \in \mathcal{M}$ , *no* que necesariamente las hagamos desaparecer en algún vecindario de  $p$ .<sup>11</sup>

*Proof.* Sea  $(V, y) \in \mathcal{A}$  una carta cualquiera con  $p \in V$ . Entonces, en general, la  $\Gamma_{(y)(jk)}^i \neq 0$ . Consideremos entonces una nueva carta  $(U, x)$  a la cual llegamos en virtud de

$$(x \circ y^{-1})(\alpha^1, \dots, \alpha^d) := \alpha^i - \frac{1}{2} \alpha^j \alpha^k \Gamma_{(y)(jk)}^i(p).$$

<sup>8</sup>Algunas variedades, como el espaciotiempo Minkowski, se pueden cubrir con una sola carta y por eso podemos conseguir que las  $\Gamma$ s puedan desaparecer *globalmente*.

<sup>9</sup>Trataremos esto brevemente más adelante.

<sup>10</sup>De nuevo, el paréntesis indica la parte simétrica:  $\Gamma_{(x)(jk)}^i = \frac{1}{2}(\Gamma_{(x)jk}^i + \Gamma_{(x)kj}^i)$ .

<sup>11</sup>Esto significa que en general no podemos poner a cero derivadas de las  $\Gamma$ s.

Entonces

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)_p &:= \partial_j (x^i \circ y^{-1})|_{(\alpha^1, \dots, \alpha^p)} \\ &= \delta_j^i - \alpha^m \Gamma_{(y)(jm)}^i(p) \\ \implies \left( \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^k \partial y^j} \right)_p &= -\Gamma_{(y)(jk)}^i(p). \end{aligned}$$

Ahora podemos elegir, sin pérdida de generalidad, la carta  $(V, y)$  tal que  $y(p) = (0, \dots, 0)$ , y entonces tenemos

$$\Gamma_{(x)jk}^i(p) = \Gamma_{(y)jk}^i(p) - \Gamma_{(y)(jk)}^i(p) = \Gamma_{(y)[jk]}^i(p),$$

y así sólo tenemos una contribución antisimétrica, por lo tanto la parte simétrica desaparece.  $\square$

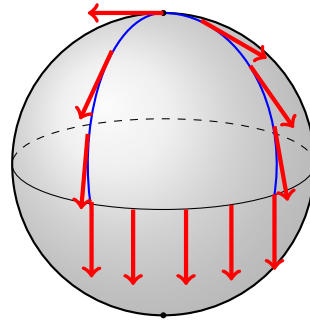
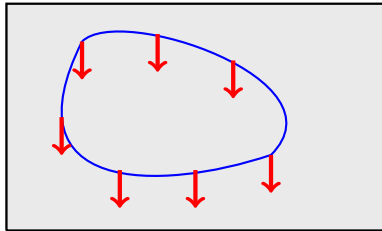
Terminología. La carta  $(U, x)$  es denominada una **carta de coordenadas normales** de  $\nabla$  en  $p \in \mathcal{M}$ .



## 8 | Transporte Paralelo & Curvatura

Consideremos el siguiente experimento: sitúese en una superficie y extienda su brazo directamente frente a usted. Tome una nota mental de hacia donde apunta el brazo. Ahora pasee alrededor de la habitación, pero hágalo de manera que *no* se le permite rotar el cuerpo o mover la posición del brazo con respecto a su tórax. Así que si quiere moverse hacia la izquierda continúe mirando hacia adelante con su brazo apuntando hacia adelante y simplemente dé un paso a la izquierda. Pasee de esta manera por la habitación todo el tiempo que quiera y finalmente vuelva a la posición inicial. Compare ahora si su brazo apunta a donde apuntaba previamente. Con tal de que haya seguido las instrucciones, si está en una superficie *plana* su brazo apuntará en la misma dirección que apuntaba al principio. Si estuviera en una superficie curva, es posible que su brazo ahora estaría apuntando en una dirección diferente.

Para comprobar que lo anterior es cierto, supongamos que la superficie es la superficie de la tierra. Imagine que empieza en el Polo Norte. Entonces camina<sup>1</sup> directamente hacia adelante hasta que alcanza el ecuador. Ahora dé un *paso lateral* hacia su derecha un cuarto de vuelta alrededor del ecuador. Finalmente camine hacia atrás hasta llegar de nuevo al Polo Norte. Su brazo apuntará ahora a un ángulo de 90 grados (hacia la derecha) respecto a como estaba inicialmente.



Matemáticamente, estamos hablando de la derivada direccional de un campo vectorial. En el plano el campo vectorial no cambia sea cual sea el camino que tome, y por eso las instrucciones de como caminar son simplemente

$$\nabla_{v_\gamma} X = 0$$

donde  $\gamma$  es el camino que toma y  $X$  es el campo vectorial formado por sus brazos.

Las instrucciones en la esfera son las mismas, pero el resultado es diferente. Esto nos da una primera pista de que la derivada covariante de alguna manera codifica la curvatura

---

<sup>1</sup>En este experimento puede caminar sobre el agua, y no existen edificios, montañas, etc. en su camino.

(intrínseca) de la superficie. A partir de aquí ya podemos convencernos de que es la conexión lo que da 'forma' a la variedad. Es decir, ambas la esfera y la patata tienen  $(S^2, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  como variedades topológicas, pero tienen diferente curvatura y por tanto diferentes conexiones,  $\nabla_{\text{esfera}}$  y  $\nabla_{\text{patata}}$ . El objetivo de esta sesión ("lecture") es ver esto con más precisión.

### 8.1 Paralelismo de Campos Vectoriales

En esta sesión asumiremos que ya hemos elegido una conexión para nuestra variedad y por lo tanto estamos tratando con una variedad suave afín  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$ .

**Definición** (Transportado paralelamente). Se dice que un campo vectorial  $X$  en  $\mathcal{M}$  es **transportado paralelamente** a lo largo de una curva suave  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  si

$$\nabla_{v_\gamma} X = 0.$$

*Observación 8.1.1.* Nótese en este punto que no necesitamos que la ranura inferior ("lower slot") sea un campo vectorial en toda la variedad  $\mathcal{M}$ , por lo que  $v_\gamma$  es sólo un campo vectorial sobre la imagen de la curva.

También tenemos una condición algo más débil.

**Definición** (Paralelo). Se dice que un campo vectorial  $X$  en  $\mathcal{M}$  es **paralelo** a lo largo de una curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  si

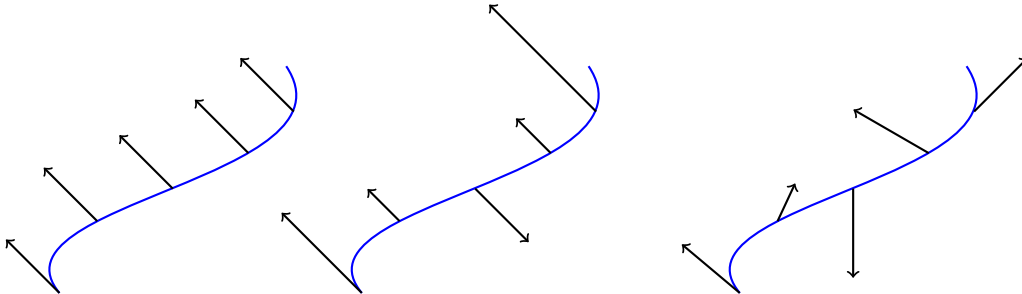
$$\nabla_{v_\gamma} X = \mu \cdot X,$$

para una función suave  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Especificado a nivel de punto ("pointwise"), es decir

$$(\nabla_{v_{\gamma, \gamma(\lambda)}} X)_{\gamma(\lambda)} = \mu(\lambda) \cdot X_{\gamma(\lambda)}.$$

Nótese par que un campo vectorial transportado sea paralelo – elegir simplemente  $\mu(\lambda) = 0$  para toda  $\lambda$ .

*Ejemplo 8.1.2.* Sea nuestra variedad afín suave en el plano euclídeo  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla_E)$ . El dibujo de abajo a la izquierda es un campo vectorial transportado paralelamente, la figura del medio es un campo vectorial paralelo y el de la derecha ni siquiera es paralelo.



En la figura del centro es importante que el campo vectorial desaparezca entre los puntos cuando apunta hacia arriba o hacia abajo, ya que  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es suave.

Observación 8.1.3. Es tentador observar el ejemplo de arriba y pensar que la longitud del campo vectorial es constante para un campo vectorial transportado paralelamente mientras que la longitud puede cambiar en un campo vectorial paralelo. Aunque esto sea correcto intuitivamente, por ahora no tenemos ni idea de cómo medir una longitud y por eso no tiene sentido hablar de una longitud que permanece igual o cambia. Es simplemente la conexión la que nos da los dibujos anteriores.

## 8.2 Curvas Transportadas Autoparalelamente

Como el nombre sugiere, una curva *autoparalelamente* transportada es aquella que es transportada paralelamente a lo largo de sí misma. Lo que esto significa es tomar el punto de arranque de la curva, mirar a su vector tangente y entonces decirle a la curva que siga esa dirección. Y repetir esto para cada punto de la curva. Usando la analogía con la "persona-con-su-brazo -extendido", sería como decir 'siga adonde apunta el brazo'.

Esto nos permite hacer una importante reflexión intuitiva: estamos trabajando a lo largo de la curva *más directa* entre dos puntos. Nótese que decimos *más directa* y no *más corta*, ya que todavía no tenemos una idea de la longitud. Nótese también que la línea *más directa* podría no aparecer recta vista desde arriba. Es decir, si insertamos la variedad en otra de mayor dimensión y a continuación miramos justo a la curva, podría parecer curvada. Por ejemplo, en la esfera una línea recta traza una porción de un círculo alrededor de la esfera. Esta línea no se ve recta en la incrustación euclídea, sin embargo *en la superficie* es la línea más recta. Escribamos esto de manera más formal.

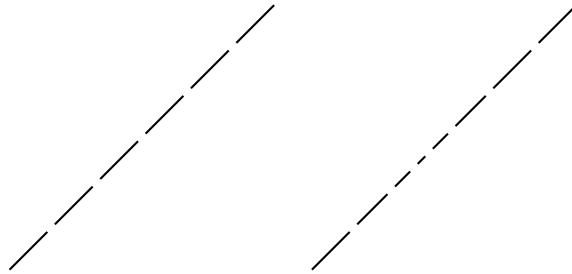
**Definición** (Transportado Autoparalelamnete). Se dice que una curva suave  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  es **transportada autoparalelamente** si

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0.$$

**Definición.** Una curva suave  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  se llama un **autoparalelo** si

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = \mu \cdot v_\gamma.$$

Ejemplo 8.2.1. Consideremos de nuevo el plano euclídeo  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla_E)$ . Si representamos cambios de parámetros iguales mediante guiones o trazos en nuestros dibujos, tenemos las figuras siguientes, donde la de la izquierda es una curva transportada autoparalelamente y la de la derecha es simplemente un autoparalelo.



Observación 8.2.2. La curva de arriba transportada autoparalelamente es lo que podemos pensar como una "curva recta uniforme", y la autoparalela es simplemente una curva recta.

Esto nos lleva a la siguiente buena reflexión. Recordemos que la primera ley de Newton se refiere a un cuerpo en movimiento que se mueve en ausencia de fuerzas a lo largo de un camino recto uniforme. Vemos, entonces, que lo que la primera ley de Newton dice es que esos cuerpos son transportados autoparalelamente. Podríamos entonces hacer un experimento como ese y usar el resultado para trabajar hacia atrás y determinar cuál es la conexión. Es decir, el primer axioma de Newton es una prescripción de medida para nuestra geometría.

Terminología. La gente también se refiere a campos vectoriales transportados autoparalelamente como simplemente *autoparalelos*. Como hemos visto esto realmente significa una curva en la que sólo requerimos que la parte derecha sea proporcional punto-por-punto a  $v_\gamma$ . A pesar de esto, en estas clases adoptaremos esta terminología y (salvo que el caso lo requiera específicamente) nos referiremos simplemente a autoparalelos, cuando realmente queremos decir transportado autoparalelamente.

### 8.3 Ecuación autoparalela

Consideremos un autoparalelo  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  y consideremos la porción de curva que cae en  $U \subseteq \mathcal{M}$  donde  $(U, x) \in \mathcal{A}$ . Nos gustaría expresar la condición  $\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0$  en términos de cartas representativas de los objetos. La parte izquierda es un campo vectorial (a lo largo de  $\gamma$ ) y así podemos expresar  $v_\gamma$  en la carta como

$$v_{\gamma, \gamma(\lambda)} = \dot{\gamma}_{(x)}^m(\lambda) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)_{\gamma(\lambda)}.$$

Entonces tenemos (suprimiendo  $(x)$  por conveniencia de notación)

$$\begin{aligned} \nabla_{v_\gamma} v_\gamma &= \nabla_{\dot{\gamma}^m \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)} \left[ \dot{\gamma}_{(x)}^n \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right] \\ &= \dot{\gamma}^m \frac{\partial \dot{\gamma}^n}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial x^n} + \dot{\gamma}^m \dot{\gamma}^n \Gamma_{nm}^q \frac{\partial}{\partial x^q}. \end{aligned}$$

Ahora, todos los índices son sumados y así podemos libremente renombrar  $n \rightarrow q$  en el primer término, y usando  $\ddot{\gamma}^n := \dot{\gamma}^m \frac{\partial \dot{\gamma}^n}{\partial x^m}$  obtenemos

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = (\ddot{\gamma}^q + \dot{\gamma}^m \dot{\gamma}^n \Gamma_{nm}^q) \frac{\partial}{\partial x^q}.$$

Ahora bien, sabemos que los elementos base son linealmente independientes y por tanto la condición de transportado autoparalelamente (reinsertando todas las  $(x)$ s y las  $(\lambda)$ s)

$$\ddot{\gamma}_{(x)}^i(\lambda) + \Gamma_{(x)jk}^i|_{\gamma(\lambda)} \dot{\gamma}_{(x)}^k(\lambda) \dot{\gamma}_{(x)}^j(\lambda) = 0,$$

que es la expresión en la carta de que la curva  $(\lambda)$  sea transportada autoparalelamente. Esta ecuación es muy importante en física, como empezaremos a ver en la próxima sesión.

Observación 8.3.1. Sabemos que la ecuación autoparalelo completa se transforma como un vector (ya que viene de  $\nabla_{v_\gamma} v_\gamma$ , que es un vector). Sin embargo ya hemos visto que las  $\Gamma$ s no son vectores y por eso no se transforman adecuadamente. Vemos, entonces, que las  $\ddot{\gamma}$  tampoco deben ser un tensor en sí, pero deben transformarse de manera que cancelen las partes malas

de las  $\Gamma$ s. Este es un hecho importante a tener en cuenta, ya que a veces estamos tentados a llamar  $\ddot{\gamma}$  a la *aceleración* a lo largo de  $\gamma$ , pero no lo es (ya que la aceleración es un vector). De hecho la aceleración es la ecuación autoparalelo completa. Este resultado es realmente bueno para nosotros ya que nos dice que que la condición para una línea recta es que la aceleración a lo largo de la línea se desvanezca! Es solamente en un espacio plano, donde llevamos todas las  $\Gamma$ s para que desaparezcan, que recuperamos  $a = \ddot{\gamma}$ . Para enfatizar, escribimos también esto en la siguiente definición. Volveremos a la aceleración al final de esta sesión.

**Definición** (Aceleración). Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  una curva suave en una variedad afín  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$ , y sea  $v_\gamma$  un campo velocidad a lo largo de  $\gamma$ . Entonces, el campo **aceleración** a lo largo de  $\gamma$  viene dado por

$$a_\gamma := \nabla_{v_\gamma} v_\gamma.$$

*Ejemplo 8.3.2.* Consideremos el plano euclídeo  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla_E)$  y la carta  $(U, x) = (\mathbb{R}^2, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2})$  de forma que  $\Gamma_{(x)jk}^i = 0$  para todas  $i, j, k = 1, 2$ . Entonces la ecuación autoparalelo reza simplemente

$$\ddot{\gamma}_{(x)}^i(\lambda) = 0 \quad \implies \quad \gamma_{(x)}^i(\lambda) = a^i \lambda + b^i,$$

donde  $a^i, b^i \in \mathbb{R}$ . Esto es lo que normalmente entendemos por la ecuación de una línea recta. Nótese, sin embargo, que esto sólo es válido en esta carta. Si hiciéramos la transformación a coordenadas polares las  $\Gamma$ s no desaparecerían por lo que la expresión para  $\gamma$  sería diferente.

*Ejemplo 8.3.3.* Consideremos ahora la llamada esfera redonda<sup>2</sup>  $(S^2, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla_{\text{redonda}})$  y la carta  $(U, x)$  con  $x(p) = (\theta, \varphi)$ , donde  $\theta \in (0, \pi)$  y  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , que son las coordenadas esféricas usuales.<sup>3</sup>

Definimos  $\nabla_{\text{redonda}}$  que sea tal que

$$\Gamma_{(x)22}^1|_{x^{-1}(\theta, \varphi)} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{(x)12}^2|_{x^{-1}(\theta, \varphi)} = \Gamma_{(x)21}^2|_{x^{-1}(\theta, \varphi)} = \cot \theta,$$

y las otras  $\Gamma$ s desaparecen. Si introducimos ahora la notación poco rigurosa ("*sloppy*")

$$x^1(p) = \theta(p), \quad \text{y} \quad x^2(p) = \varphi(p),$$

entonces la ecuación autoparalelo reza así

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \Gamma_{(x)22}^1 \dot{\varphi} \dot{\varphi} &= \ddot{\theta} - \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\varphi} \dot{\varphi} = 0 \\ \ddot{\varphi} + 2\Gamma_{(x)12}^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} &= \ddot{\varphi} + 2 \cot(\theta) \dot{\varphi} \dot{\theta} = 0. \end{aligned}$$

Veamos a hora las soluciones de estas ecuaciones. Una solución es

$$\theta(\lambda) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \varphi(\lambda) = \omega \cdot \lambda + \varphi_0,$$

para  $\omega, \varphi_0 \in \mathbb{R}$ , que es comprobada por sustitución directa. Estas ecuaciones corresponden justamente a circular alrededor del ecuador, a velocidad constante.

<sup>2</sup>Es decir una esfera perfecta, pero aquí 'redonda' nos indica que debemos usar la conexión que la hace así, y no, digamos, la de la patata.

<sup>3</sup>Es decir  $\theta$  es el ángulo desde el eje- $z$  y  $\varphi$  el ángulo desde el eje- $x$ . Nótese que los ejes- $x, y, z$  son realmente un sistema de coordenadas en sí mismos.

Podemos constatar que una curva que da la vuelta a la esfera (por ejemplo, del Polo Norte al Polo Sur y vuelta) satisface estas ecuaciones. Así vemos que las curvas más rectas (es decir, las que satisfacen la ecuación autoparalelo) en la esfera redonda son precisamente las que dan toda la vuelta completa. Por esto la elección de las  $\Gamma$ s corresponde a la esfera redonda; entendemos una esfera redonda como aquella cuyas líneas rectas se comportan de esta manera.

*Observación 8.3.4.* Técnicamente el último ejemplo es algo inexacto. Esto es porque el dominio de la carta  $U$  no cubre toda la esfera redonda sino que necesariamente debe omitir los dos puntos antípodas (por ejemplo el los polos Norte y Sur) y una línea recta que los conecte (p.ej. una línea de longitud). Sin embargo, los resultados del ejercicio aún son claros.

#### Ejercicio

Mostrar que la declaración de la nota anterior es cierta: que  $U$  debe omitir los dos puntos antípodas y la línea recta que los conecta.

### 8.4 Torsión

Pregunta: Podemos usar  $\nabla$  para definir tensores en  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$ ?

Respuesta: Sí.

**Definición** (Torsión). La **torsión** de una conexión  $\nabla$  es el campo tensor- $(1, 2)$

$$T(\omega, X, Y) := \omega : (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]),$$

donde  $[\cdot, \cdot] : \Gamma T\mathcal{M} \times \Gamma T\mathcal{M} \rightarrow \Gamma T\mathcal{M}$  es el conmutador<sup>4</sup> en  $\Gamma T\mathcal{M}$  dado por

$$[X, Y]\langle f \rangle := X\langle Y\langle f \rangle \rangle - Y\langle X\langle f \rangle \rangle.$$

#### Ejercicio

Probar que  $T$  es lineal- $C^\infty$  en cada entrada, lo cual se requiere para que  $T$  sea un tensor.

**Definición** (Conexión Libre de Torsión). Una variedad afín  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$  es denominada **libre de torsión** si el tensor torsión  $T$  desaparece por todas partes. Se puede decir también que la conexión es libre de torsión. A menudo se escribe así

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo  $X, Y \in \Gamma T\mathcal{M}$ .

#### Ejercicio

Mostrar que una variedad libre de torsión es aquella tal que las  $\Gamma$ s son puramente simétricas. Es decir mostrar  $\Gamma^i_{[ab]} := \frac{1}{2}(\Gamma^i_{ab} - \Gamma^i_{ba}) = 0$ .

*Pista:* Calcular  $T^i_{ab} = T(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b})$ .

<sup>4</sup>De hecho, este es un corchete de Lie restringiendo a linealidad- $\mathbb{R}$  en lugar de linealidad- $C^\infty$ , y define el álgebra de Lie de campos vectoriales. Lo veremos en la sesión 11.

*Observación 8.4.1.* El ejercicio anterior es exactamente el resultado que tratamos cuando introdujimos las  $\Gamma$ s por primera vez, que comentamos que sólo podían remover la parte simétrica mediante transformación en la carta.

Se ha tratado de atribuir un significado físico a la torsión (p.ej. la "Estructura Espaciotiempo" de Schrödinger) pero no lo contemplamos así en la teoría estándar de la relatividad general y así desde este punto en adelante en las sesiones<sup>5</sup> sólo usaremos conexiones libres de torsión.

## 8.5 Curvatura

Hay otro tensor, más importante, que podemos definir usando nuestra conexión.

**Definición** (Curvatura Riemann). La **Curvatura Riemann** de una conexión  $\nabla$  es el campo tensor-(1, 3)

$$\text{Riem}(\omega, Z, X, Y) := \omega : (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z).$$

Nótese el orden de las entradas, es  $(Z, X, Y)$ , no  $(X, Y, Z)$ , es simplemente una convención que hace que la parte derecha se vea más ordenada.

**Definición** (Curvatura de Ricci). sea  $\text{Riem}$  el tensor de curvatura Riemann de una conexión  $\nabla$ . Definimos el tensor de **curvatura Ricci** como el campo tensor-(0, 2)

$$\text{Ric}(X, Y) := \text{Riem}(e^a, Y, X, Z_a),$$

donde  $e^a : Z_b = \delta_b^a$ .

En términos de componentes<sup>6</sup> el tensor de curvatura de Ricci viene dado por

$$\text{Ric}_{ab} := \text{Riem}^c_{acb}.$$

*Notación.* Hemos definido el tensor de curvatura de Riemann con el símbolo  $\text{Riem}$  y la curvatura de Ricci con el símbolo  $\text{Ric}$ . En la literatura a menudo vemos el símbolo  $R$  usado para ambos tensores. Esto se hace así porque normalmente miramos a los componentes y se puede deducir fácilmente de cuál se trata basado en eso. Sin embargo, como veremos, hay un tercer objeto llamado el escalar Ricci (que no lo podemos definir hasta que hayamos definido la métrica) que denominamos  $R$ . Dado que este es un escalar, no tiene índices y aparece simplemente como  $R$ . Hemos decidido, pues, usar  $\text{Riem}$  y  $\text{Ric}$  en estas notas para evitar posibles confusiones.

### Ejercicio

Mostrar que  $\text{Riem}$  es lineal- $C^\infty$  e todas sus entradas.

<sup>5</sup>Aunque no en los tutoriales.

<sup>6</sup>Véase el tutorial sobre los componentes de  $\text{Riem}$ .

## Ejercicio

Mostrar que Riem es antisimétrico en sus dos últimas entradas. Es decir

$$\text{Riem}(\omega, Z, X, Y) = -\text{Riem}(\omega, Z, Y, X).$$

Usar el segundo resultado para mostrar que Riem tiene  $d^3(d-1)/2$  componentes independientes.

*Pista: Las dos segundas partes se dan en el vídeo tutorial*

Notación. Cuando no exista confusión sobre qué base<sup>7</sup> está siendo usada, usaremos la notación abreviada

$$\nabla_a := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}}.$$

A la luz de esto, deberíamos usar también la notación abreviada

$$\partial_a := \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Esto último es sutil ya que tenemos que recordar que la parte derecha de la expresión se define en términos de derivadas parciales, las cuales se representan como  $\partial_i$ .

Una relevancia algebraica de Riem es lo siguiente. Tenemos el resultado

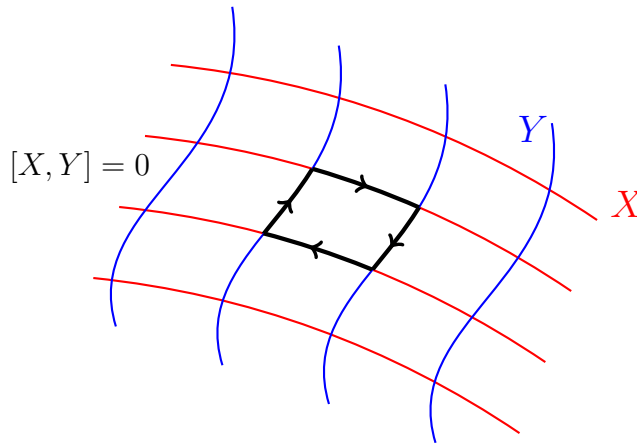
$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \text{Riem}(\cdot, Z, X, Y) + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Si consideramos una carta  $(U, x)$  y hacemos  $X = \partial_a$  y  $Y = \partial_b$ , se convierte en

$$(\nabla_a \nabla_b Z)^m - (\nabla_b \nabla_a Z)^m = \text{Riem}^m_{\phantom{m} nab} Z^n,$$

donde hemos usado  $[\partial_a, \partial_b] = 0$ .

Afirmación 8.5.1. El corchete de Lie  $[X, Y]$  contesta la pregunta "cómo de bien pueden los campos vectoriales  $X$  y  $Y$  ser campos vectoriales coordenados". Es decir, esto nos dice que si tendemos  $X$  e  $Y$  uno sobre otro, formarán una cuadrícula (*grid*)? Gráficamente, es como preguntar "se cerrará la forma cuadrada negra?". Si  $[X, Y] = 0$  entonces la respuesta es afirmativa.



<sup>7</sup>Es decir, cuando estamos tratando con una sola base. Si hay más de una (P.ej. un cálculo de cambio de bases) es fundamental fijarse en qué índices son para qué bases.



A partir de esta afirmación podemos obtener un bonito concepto geométrico de la curvatura de Riemann. La parte izquierda  $(\nabla_a \nabla_b Z - \nabla_b \nabla_a Z)$  toma el vector  $Z$  de la esquina inferior de la figura en negro y alrededor en la dirección de las flechas dibujadas (nótese que el signo menos significa que hacia abajo de la  $X$  y a la izquierda de la  $Y$ ). Si Riem desaparece, el resultado es que la  $Z$  transportada y la  $Z$  inicial coinciden, y por lo tanto no nos hemos desplazado por la curva (recordemos que el transporte paralelo en una superficie curva es dependiente de la trayectoria). Mientras que si Riem no desvanece, entonces el  $Z$  transportado no es el mismo que el  $Z$  inicial por lo que hemos tenido que ir por la curvatura. En consecuencia, el tensor de curvatura de Riemann codifica información acerca de la curvatura de la variedad (de ahí su nombre!).

*Observación 8.5.2.* Nótese que hemos usado una carta para obtener el resultado anterior y por eso podríamos estar preocupados porque Riem desaparezca en una carta y no en otra (p.ej. Cartesianas a polares). La respuesta obviamente es que esto no puede suceder porque es un tensor y por eso si desaparece en una carta tiene que desaparecer en todas las cartas.

**Lema 8.5.3.** *El tensor de Riemann satisface la **identidad Bianchi** diferencial,*

$$(\nabla_A \text{Riem})(\omega, Z, B, C) + (\nabla_B \text{Riem})(\omega, Z, C, A) + (\nabla_C \text{Riem})(\omega, Z, A, B) = 0,$$

donde  $\nabla$  es libre de torsión. En forma de componentes se escribe así

$$\nabla_c R^w_{\phantom{w} zab} + \nabla_a R^w_{\phantom{w} zbc} + \nabla_b R^w_{\phantom{w} zca} = 0$$

#### Ejercicio

Probar que se cumple la identidad Bianchi.

*Pista (del tutorial): Empezar reescribiendo sólo el primer término mediante el uso repetido de la regla Leibniz rule y el uso una vez de la definición del tensor de Riemann. A partir de este resultado, generar los términos segundo y tercero mediante la mera sustitución cíclica de los vectores apropiados. El resto es una sistemática y disciplinada eliminación de términos.*

## 9 | El Espacio Newtoniano es Curvo

El título de esta sesión parece chocante: no era plano el espacio Newtoniano? La respuesta es 'sí lo es en la formulación estándar.' El objetivo de esta sesión es expresar el espaciotiempo newtoniano de una manera nueva de forma que la gravedad se manifieste ella misma como curvatura. Es importante señalar que esto **no** es relatividad especial, es simplemente espaciotiempo newtoniano.

Nuestro argumento va a girar alrededor de mostrar que la gravedad no debe ser considerada como una fuerza sino que en cambio debe ser considerada como codificada en la curvatura del espaciotiempo.

Recordemos las primeras dos leyes de Newton:

- (I) Un cuerpo en el que **no** actúa ninguna fuerza se mueve uniformemente a lo largo de una línea recta.
- (II) La desviación del movimiento de un cuerpo de la trayectoria recta es debida a una fuerza, reducida por un factor de la masa recíproca del cuerpo.

Lo primero a tener en cuenta es que, si se lee como una prescripción de lo que es un cuerpo, el primer axioma es meramente un caso específico del segundo (es decir, simplemente dejar que la fuerza desaparezca en Newton II). Tenemos por tanto que leer el primer axioma de forma diferente: Asumimos que una partícula no experimenta ninguna fuerza y que usamos estas partículas para comprobar experimentalmente lo que es una línea recta. El primer axioma es una prescripción de medida de la geometría.

El segundo punto importante a tener en cuenta es que, si entendemos la gravedad como una fuerza, el primer axioma sólo es útil si consideramos un universo en el que sólo vive una partícula. Es decir, la gravedad actúa universalmente en todos los objetos masivos y por tanto, si tenemos dos partículas masivas en nuestro universo (lo cual nuestro Universo claramente tiene <sup>1</sup>) ambas tienen que experimentar una fuerza, y así pues Newton (I) se vuelve inútil... A menos que dejemos de pensar en la gravedad como una fuerza.

*Observación 9.0.1.* Se podría pensar que aquí somos un poco pedantes y decir simplemente 'oh ok, pero podemos usar simplemente Newton II y seguir nuestro alegre camino!' El problema con esto es que Newton II habla de la desviación de una línea recta, y sin Newton I no sabemos lo que es una línea recta.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>De otra manera no hay nadie más que lea estas notas, y yo he perdido mi tiempo.

<sup>2</sup>Jaque mate.

## 9.1 Pregunta de Laplace

Laplace planteó la siguiente pregunta:

*"Puede la gravedad ser codificada en la curvatura del espacio, de manera tal que sus efectos indiquen si las partículas bajo la influencia de (ninguna otra) fuerza son postuladas a moverse a lo largo de líneas rectas en este espacio curvo?"*

La respuesta a esta pregunta es, desafortunadamente para Laplace, un rotundo "no".

*Proof.* Consideremos el punto de vista 'la gravedad como una fuerza'. Tenemos

$$m\ddot{x}^\alpha(t) = F^\alpha(x(t)),$$

para  $\alpha = 1, 2, 3$ , y la ecuación de Poisson para  $F^\alpha = mf^\alpha$

$$-\partial_\alpha f^\alpha = 4\pi G\rho.$$

Sustituyendo en  $F^\alpha = mf^\alpha$  vemos que no podemos cancelar las  $m$ s para conseguir una relación entre la aceleración y la fuerza que sea independiente de la masa. Esto es un hecho verificado experimentalmente (ver [vídeo en 16:50-20:00](#) si no estás familiarizado con ese experimento), y al que se le ha dado el nombre de 'principio de equivalencia débil'.

Por lo que la pregunta de Laplace's se convierte en

$$\ddot{x}^\alpha(t) - f^\alpha(x(t)) = 0$$

que tiene la forma de una ecuación autoparalelo. Es decir, que es de la forma

$$\ddot{x}^\alpha(t) + \dot{x}^\beta(t)\dot{x}^\gamma(t)\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x(t)) = 0?$$

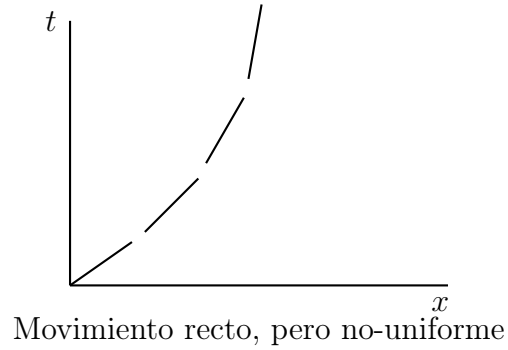
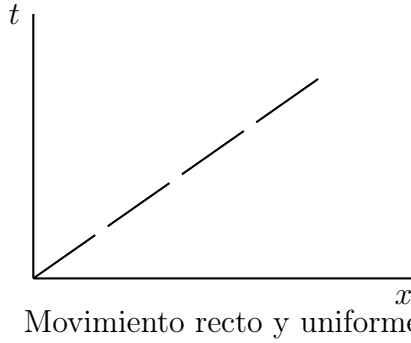
La respuesta es no, porque  $f^\alpha$  no es más que una función de  $x(t)$  y no de sus derivadas, pero el segundo término en la ecuación autoparalelo contiene derivadas. Junto con esto, las  $\Gamma$ s sólo dependen de  $x(t)$  y por eso no podemos cancelar esta dependencia de la velocidad, por lo que no es posible igualar las dos expresiones.

Así que no podemos encontrar  $\Gamma$ s tal que la ecuación de Newton tome la la forma de un autoparalelo, y debido a que las  $\Gamma$ s son lo que determina la conexión, que hemos visto que está relacionada con la curvatura, no podemos codificar el efecto de la gravedad como una curvatura.  $\square$

## 9.2 La Plena sabiduría de Newton I

Acabamos de mostrar que la respuesta a la pregunta de Laplace era no, entonces por qué preocuparnos por eso? La respuesta es que esto hace resaltar su fallo y entonces nos permite ver lo que hay que cambiar para conseguir algo correcto. El problema es que Laplace no leyó Newton I con el cuidado necesario. Newton I no sólo habla de movimiento, sino de movimiento *uniforme*.

Movimiento uniforme implica algo que se mueve en el *tiempo* así como en el espacio. El movimiento uniforme es trazado como una línea recta en el gráfico espacio-tiempo, mientras que el movimiento recto, pero no uniforme, viene dado por una curva.



Entonces, en una imagen del espaciotiempo, el movimiento recto, uniforme en el espacio es simplemente movimiento recto. Así que nuestra idea es alterar la pregunta de Laplace para que sea "... curvatura del espaciotiempo, ...", y entonces repetir el proceso. Fijémonos de nuevo en que aquí estamos hablando de espaciotiempo newtoniano, esto no es relatividad general!

Para el movimiento en el espacio teníamos el movimiento de partículas dado por  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Tenemos que convertir esto en la *línea del mundo*, que obtenemos del mapa  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  dado por

$$X(t) = (t, x^1(t), x^2(t), x^3(t)) := (X^0(t), X^1(t), X^2(t), X^3(t)).$$

No hemos hecho nada nuevo, simplemente hemos convertido la parametrización de la curva (el 'tiempo') en una coordenada y hemos considerado la representación espaciotiempo.

Afirmación 9.2.1. Haciendo esto, la respuesta a la pregunta de Laplace modificada, es "sí".

*Proof.* Supongamos que (nótese que aquí ahora es  $x$  minúscula)

$$\ddot{x}^\alpha(t) = f^\alpha(x(t))$$

para  $\alpha = 1, 2, 3$ , aún se mantiene. Y tenemos el resultado trivial

$$\dot{X}^0(t) = 1, \quad \implies \quad \ddot{X}^0(t) = 0.$$

Podemos reescribir la ecuación de Newton en términos de  $X$  mayúscula como<sup>3</sup>

$$\ddot{X}^\alpha(t) = f^\alpha(X(t)),$$

para  $\alpha = 1, 2, 3$ . Ahora podemos multiplicar por  $\dot{X}^0(t)$  porque es igual a 1, y así tenemos

$$\ddot{X}^\alpha(t) - f^\alpha(X(t))\dot{X}^0(t)\dot{X}^0(t) = 0.$$

Ahora combinando esto con la ecuación  $\ddot{X}^0(t) = 0$ , vemos que tenemos una ecuación autoparalelo

$$\ddot{X}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{X}^b\dot{X}^c = 0$$

donde  $a, b, c = 0, 1, 2, 3$ . Esto se ve eligiendo todas las  $\Gamma$ s para que desaparezcan todas menos

$$\Gamma^\alpha_{00} = -f^\alpha \quad \forall \alpha = 1, 2, 3.$$

<sup>3</sup>Nótese que  $f^\alpha(X(t))$  es una nueva función, pero la definimos justo para que ignore la primera entrada.

Esto podría ser un mecanismo de elección-coordenada, y así ya podría transformarse. Resulta que ese no es el caso, y se puede ver calculando los componentes del tensor de Riemann. Las únicas que no desaparecen son

$$\text{Riem}^\alpha_{0\beta 0} = -\partial_\beta \langle f^\alpha \rangle.$$

Como esto es un tensor, si no desaparece en una carta no debe desaparecer en ninguna.  $\square$

Observación 9.2.2. Dado el tensor de Riemann al final de la demostración anterior, ya podemos calcular el tensor de Ricci, haciendo  $\alpha = \beta$ ,

$$\text{Ric}_{00} = -\partial_a \langle f \rangle,$$

lo cual, usando la ecuación de Poisson nos da

$$\text{Ric}_{00} = 4\pi G\rho.$$

Esta es realmente una de las llamadas ecuaciones de Einstein

$$\text{Ric}_{00} = 8\pi G T_{00},$$

donde  $T_{00} = \rho/2$ .  $T$  es conocido como el *tensor energía-momento*, que lo veremos más adelante en mucho más detalle.

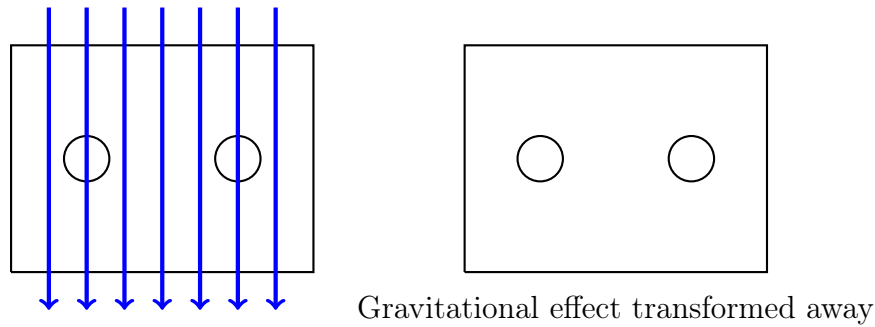
Observación 9.2.3. Nótese el hecho de que sólo las  $\Gamma$ s que no desaparecen tienen 'tiempo' como ambos índices inferiores (es decir, son 0), lo que nos dice que la curvatura tiene lugar en el *espaciotiempo*, no solamente en el espacio. Es decir que el tensor de Riemann se desvanece para todos los índices espaciales  $\text{Riem}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0$  para todas  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3$ .

### 9.2.1 Fuerzas de Marea

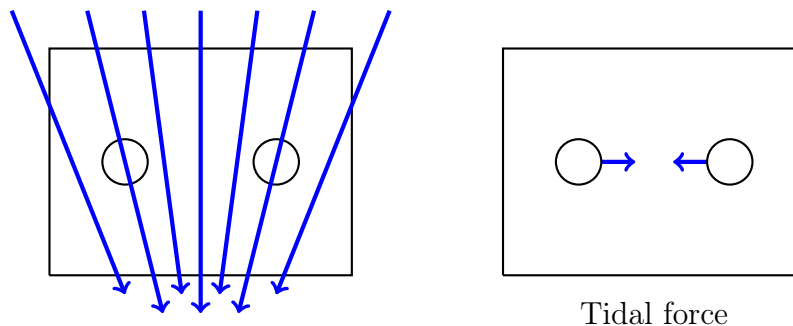
(*Tidal Forces*) No siendo el resultado anterior capaz de transformarse, el resultado de la curvatura es conocido como fuerzas de marea. La idea básica es que sólo pueden transformarse campos gravitacionales localmente. En otras palabras, la única manera en que se puede transformar globalmente un campo gravitacional es si el campo es uniforme.

Para entender el caso, imaginemos que estamos dentro de una caja con dos bolas en el espacio. Imaginemos ahora que la caja está en un campo gravitatorio, y por tanto está en caída libre hacia cierto objeto masivo. Ignoraremos los campos gravitatorios originado por nuestro cuerpo y por las bolas mismas. Si el campo gravitatorio es uniforme en toda la caja, todo experimenta la misma atracción y por tanto todo cae de la misma forma. Es decir, si sacamos las bolas a ambos lados de nosotros, se verán simplemente flotando, y si no hubiera ventanas en nuestra caja para ver las cosas pasar junto a nosotros, ni siquiera sabríamos en realidad si estamos en un campo gravitatorio. Obviamente si alguien estuviera quieto (con respecto al objeto masivo) fuera de la caja, vería las bolas cayendo y diría que están en un campo gravitatorio.

Lo que está ocurriendo en esa situación es que nos hemos transformado a nosotros mismos en un marco de referencia (lo que para esta nota es simplemente una carta) que cae con las bolas y así hemos 'removido' los efectos de la gravedad mediante el cambio de carta.



Imaginemos ahora que hacemos lo mismo, pero que el campo gravitatorio no es uniforme, sino que viene radialmente desde un objeto esférico. De nuevo todo cae aún al mismo ritmo, pero ahora la bola a nuestra izquierda se verá atraída ligeramente hacia la derecha y la bola a nuestra derecha se verá atraída ligeramente hacia la izquierda. Entonces, para nosotros dentro de la caja, las bolas se mueven ligeramente una hacia la otra. Esto no es un efecto que podamos eliminar cambiando de marco de referencia, por lo que representa algo físico. Esto es gravedad 'real'.



La incapacidad para remover este efecto mediante un cambio de carta es lo que se denomina fuerzas de marea.<sup>4</sup> De esto vemos que cuando sentimos que la gravedad nos atrae, lo que realmente sentimos es la naturaleza no homogénea de la gravedad; atrae nuestros pies con más fuerza que nuestra cabeza y empuja nuestros brazos uno hacia el otro.

### 9.3 La Base de la Formulación Geométrica de los Axiomas de Newton

Hasta ahora hemos logrado cambiar nuestra idea de la gravedad como una fuerza a la idea de que es parte de la curvatura del espaciotiempo. Se ha hecho esto para que el primer axioma de Newton, que ahora reza "la línea del mundo de un cuerpo en el que no actúa ninguna fuerza, es una línea recta en el espaciotiempo", puede ser tomado como una prescripción de medida de lo que es una línea recta. El problema es que, hemos tenido índices volando de un lado para otro y por tanto hemos cometido el crimen de confiar en las cartas!

Ahora vamos a volver a derivar el resultado sin hacer ninguna referencia a cartas. Lo haremos de nuevo, por lo que utilizaremos los resultados que acabamos de obtener (p.ej.  $\Gamma^{\alpha}_{00} = -f^{\alpha}$ ). Para hacer esto, necesitamos introducir algunas definiciones.

<sup>4</sup>El nombre viene del hecho de que esto es debido a que la luna crea mareas en los océanos/mares.

**Definición** (Espaciotiempo Newtoniano). Un **espaciotiempo newtoniano** es una quintupla de estructuras  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla, t)$ , donde  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  es una variedad suave 4-dimensional y  $t : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave llamada **tiempo absoluto**, que cumple:

- (i)  $(dt)_p \neq 0$  para todo  $p \in \mathcal{M}$  — es un concepto de *espacio absoluto* (definido abajo),
- (ii)  $\nabla dt = 0$  en todas partes — el tiempo absoluto fluye uniformemente,
- (iii)  $\nabla$  es libre de torsión.

**Definición** (Espacio Absoluto). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla, t)$  un espaciotiempo newtoniano. **Espacio absoluto** en el tiempo  $\tau$  es el conjunto

$$S_\tau := \{p \in \mathcal{M} \mid t(p) = \tau\}.$$

De lo que resulta que

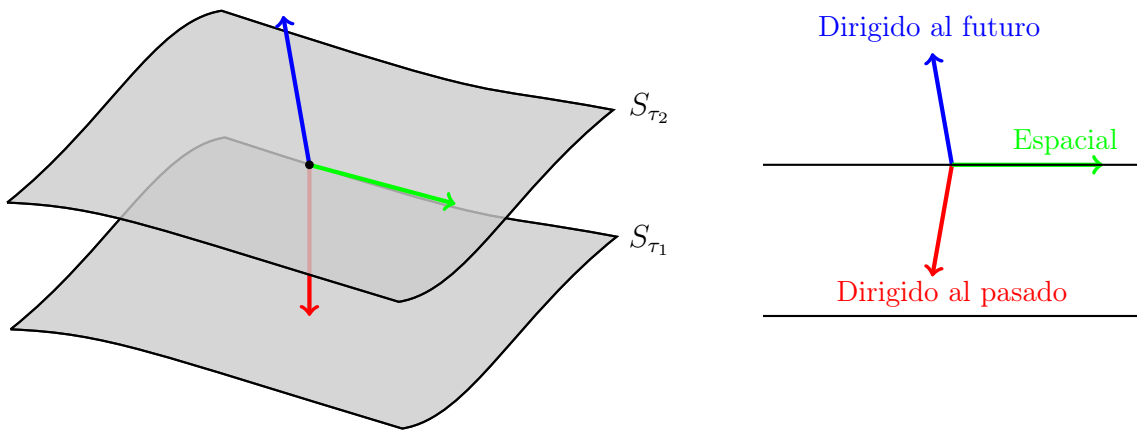
$$\mathcal{M} = \bigcup_{\tau} S_\tau.$$

La condición (i) en la definición de espaciotiempo newtoniano es la que nos da la unión disjunta en la definición de tiempo absoluto. Es decir, la condición (i) dice que las superficies del espacio absoluto no deben encontrarse en tiempos diferentes, como si hicieran que el gradiente de  $t$  se desvaneciera. Nótese que sólo podemos pensar en la separación del espaciotiempo en espacio y en tiempo una vez que hemos introducido la función de tiempo absoluto. antes de esto era simplemente una variedad 4-dimensional.

**Definición** (Orientado al Futuro / Espacial / Orientado al Pasado). Se dice que un vector  $X \in T_p\mathcal{M}$  es

- (i) **Orientado al futuro** si  $dt : X > 0$ ,
- (ii) **Espacial** si  $dt : X = 0$ , and
- (iii) **Orientado al pasado** si  $dt : X < 0$ .

Gráficamente vemos bien la definición anterior. Sea  $\tau_2 > \tau_1$ , entonces tenemos la siguiente imagen:



Ahora podemos expresar las leyes de Newton como

- (I) La línea del mundo de una partícula bajo la influencia de ninguna fuerza (la gravedad no es una fuerza aquí) es un autoparalelo orientado al futuro. Es decir  $\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0$  y  $dt : v_\gamma > 0$  se cumplen en todas partes.
- (II) La aceleración a lo largo de la línea del mundo es

$$a_\gamma := \nabla_{v_\gamma} v_\gamma = \frac{F}{m},$$

donde la fuerza,  $F$ , es un campo vectorial espacial,  $dt : F = 0$ , y donde  $m$  es la masa de la partícula.

## 9.4 Aceleración

Convención. Centremos la atención en los atlas  $\mathcal{A}_{\text{estratificado}}$  donde la carta  $(U, x)$  tiene la propiedad de que  $x^0 = t|_U$ . Es decir que el primer mapa gráfico o mapa de la carta (*chart map*) coincide con la función de tiempo absoluto. Esta convención, junto con la condición (ii) en la definición de espaciotiempo newtoniano nos da

$$0 = (\nabla_a dx^0)_b = -\Gamma^0_{ba}$$

para  $a, b = 0, 1, 2, 3$ . Así pues en un atlas estratificado todas las  $\Gamma$ s con un índice superior 0 se desvanecen.

Evaluemos ahora Newton II en un atlas estratificado. Marquemos por  $X(\lambda)$  la línea del mundo de la partícula, entonces tenemos

$$\nabla_{v_X} v_X = \frac{F}{m}.$$

Tenemos

$$(X^\alpha)'' + \Gamma^\alpha_{\gamma\delta}(X^\gamma)'(X^\delta)' + 2\Gamma^\alpha_{0\gamma}(X^\gamma)'(X^0)' + \Gamma^\alpha_{00}(X^0)'(X^0)' = \frac{F^\alpha}{m},$$

para  $\alpha = 1, 2, 3$ , donde hemos usado el hecho de que el espaciotiempo newtoniano es libre de torsión por lo que las  $\Gamma$ s son simétricas en los índices inferiores.

Ahora, aprovechando el hecho de que  $F$  es un campo vectorial espacial (por lo que  $F^0 = 0$ ) tenemos también

$$\begin{aligned} (X^0)'' + \Gamma^0_{ab}(X^a)'(X^b)' &= 0 \\ (X^0)'' &= 0 \\ \implies X^0(\lambda) &= a\lambda + b \\ (t \circ X)(\lambda) &= a\lambda + b, \end{aligned}$$

para  $a, b \in \mathbb{R}$ . Esto nos da la idea de que podemos re-parametrizar la curva en función del tiempo absoluto, con lo que obtenemos

$$\frac{d}{d\lambda} \longrightarrow a \frac{d}{dt}.$$



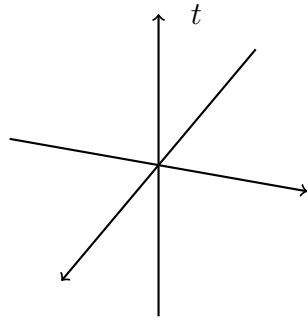
Sustituimos esto en la expresión para el tiempo espacial y nos da

$$\ddot{X}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} \dot{X}^\gamma \dot{X}^\delta + 2\Gamma^\alpha_{0\gamma} \dot{X}^0 \dot{X}^\gamma + \Gamma^\alpha_{00} \dot{X}^0 \dot{X}^0 = \frac{F^\alpha}{a^2 m}.$$

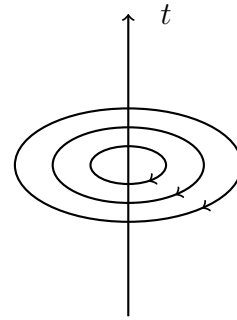
Recordando ahora la Observación 8.3.1, vemos que el lado izquierdo *completo* es el componente  $\alpha$  de la aceleración, *no* simplemente  $\ddot{X}^\alpha$ . Este es un resultado profundo y explica muchas de las cosas de las que se habla en los niveles inferiores de educación.

Observamos primero que el término  $\Gamma^\alpha_{00}$  es no-cero en presencia de la gravedad, es  $-f^\alpha$ . Asumamos entonces que no hay gravedad por lo que este término desaparece. Ahora, existe una carta tal que todas las  $\Gamma$ s desaparecen y nos quedamos simplemente con  $\ddot{X}^\alpha = F^\alpha/a^2 m$ , que es el resultado usual. Sin embargo, si elegimos otra carta las  $\Gamma$ s vuelven a aparecer! Obviamente, físicamente nada ha cambiado, pero parece que al contemplar el problema de forma diferente se introducen nuevas 'aceleraciones' (entrecomillado, porque sabemos que no son aceleraciones reales, sólo su suma lo es). Estas son cartas en el espaciotiempo, no sólo espacio, y por eso debemos asegurarnos de que lo tenemos en cuenta.

Loa términos  $\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}$  surgen si simplemente elegimos otro sistema de coordenadas, p.ej. podríamos usar coordenadas polares en lugar de cartesianas para la parte espacial y dejar el tiempo sin cambio .



Todas las  $\Gamma$ s desaparecen



$\Gamma^\alpha_{\text{trminos}\gamma\delta}$  presentes

Los términos  $\Gamma^\alpha_{0\gamma}$  surgen cuando las rodajas de la carta espacial se 'mueven' en el tiempo. Por ejemplo si la carta se componía de muchas rodajas espaciales que giraban alrededor del eje tiempo, que denominaremos carta rotatoria. Es importante tener en cuenta que es sólo la carta la que giraba, no que están girando las rodajas espaciales del mundo verdadero, real. En este caso ambos términos el  $\Gamma^\alpha_{00}$  y  $\Gamma^\alpha_{0\gamma}$  aparecen y representan las pseudo-aceleraciones denominadas *centrífuga* y *Coriolis*. Lo de "pseudo" nos dice que hay algo que no es totalmente correcto para que sean aceleraciones, y ahora entendemos por qué: no son aceleraciones en sí mismas sino sólo la suma es una aceleración.

## 10 | Variedades Métricas

Establecemos una estructura en una variedad suave  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  que nos permite asignar a los vectores en cada espacio tangente <sup>1</sup> una longitud (y un ángulo entre vectores en el mismo espacio tangente). Una estructura así en cada espacio tangente es un *producto interno* ("inner product"), y la estructura completa sobre todos los espacios tangentes es lo que denominamos *métrica* (es decir es un campo producto interno en cada espacio tangente).

A partir de esta estructura, se puede definir el concepto de longitud de una curva. A continuación podemos examinar las curvas más cortas (y más largas), que son conocidas como *geodésicas*. Desarrollaremos esto de manera completamente independiente del concepto de curvas rectas, es decir, de la derivada covariante, pero entonces finalmente habrá que insistir en que, por razones obvias, ambas coinciden. Haciendo esto definiremos lo que entendemos por las llamadas conexiones *compatibles con la métrica*.

### 10.1 Métrica

**Definición** (Métrica). Una **métrica**  $g$  en una variedad suave  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  es un campo tensor- $(0, 2)$  que cumple:

- (i) Es simétrico;  $g(X, Y) = g(Y, X)$ , para todo  $X, Y \in \Gamma T\mathcal{M}$ , y
- (ii) Non-degeneración; el mapa  $\flat : \Gamma T\mathcal{M} \rightarrow \Gamma T^*\mathcal{M}$ , dado por

$$\flat(X) : Y := g(X, Y),$$

es un isomorfismo- $C^\infty$ , es decir que es invertible y suave en ambas direcciones.

**Definición** (Métrica Inversa). La **métrica inversa**,  $g^{-1} : \Gamma T^*\mathcal{M} \times \Gamma T^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} C^\infty(\mathcal{M})$ , con respecto a una métrica  $g$  es el campo tensor simétrico- $(2, 0)$  definido por

$$g^{-1}(\omega, \sigma) := \omega : \flat^{-1}(\sigma).$$

*Observación 10.1.1.* Hay que tener cuidado al referirse a  $g^{-1}$  como un inverso. No es un inverso en el sentido de un mapa, sino en el sentido de matriz. Es decir, el mapa inverso de  $g : \Gamma T\mathcal{M} \times \Gamma T\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} C^\infty(\mathcal{M})$  sería un mapa de  $C^\infty(\mathcal{M})$  a  $\Gamma T\mathcal{M} \times \Gamma T\mathcal{M}$ , lo que  $g^{-1}$  no es. Si designamos<sup>2</sup> los componentes de  $g^{-1}$  simplemente como  $g^{ab}$  (no hay  $-1$  en esto), entonces lo que queremos decir por inverso es que se cumple lo siguiente:

$$g^{ac} g_{cb} = \delta_b^a.$$

<sup>1</sup>Si sólo estuviéramos considerando definir una longitud, definiríamos simplemente una norma en nuestra variedad. Para más información sobre normas véanse las clases del Dr. Schuller sobre Quantum Theory.

<sup>2</sup>Y así haremos en adelante.

*Observación 10.1.2.* Es muy común que la gente hable de "subir/bajar" índices usando la métrica/métrica inversa. Lo que quieren decir es que  $\flat(X)$  es un covector y por tanto tiene un índice covariante. Sin embargo, somos perezosos y no queremos tener que estar escribiendo el bit  $\flat$  así que escribimos

$$X_a := g_{am} X^m,$$

y de forma similar para un covector hecho en un vector mediante  $\flat^{-1}$ . El problema claramente es que, salvo que lo especifiquemos, no sabemos si  $T_a$  son los componentes de un covector definido independientemente de la métrica o si son los componentes "bajados" de un vector, y por tanto, dependientes de la métrica. En estas notas nunca suprimiremos la métrica y por lo tanto no hablaremos de índices "subidos/bajados".

*Ejemplo 10.1.3.* Consideremos la variedad suave  $(S^2, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  con la carta  $(U, x)$  correspondiente a las coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$ .<sup>3</sup> Definimos la métrica como<sup>4</sup>

$$g_{ij}(x^{-1}(\theta, \varphi)) := \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}_{ij}.$$

Esto nos da la *esfera redonda de radio  $R$* . Nótese, al igual que con la conexión, definir una métrica nos permite dar forma (*shape*) a la variedad. Nótese también, sin embargo, que, a diferencia de la esfera redonda obtenida usando la conexión, podemos hablar del *tamaño* de la esfera obtenida con la métrica.

## 10.2 Firma

(*Signature*)

Recordemos la ecuación de valor propio ("*eigenvalue equation*")

$$Av = \lambda \cdot v,$$

donde  $v$  es un vector propio ("*eigenvector*"). Si queremos expresar esto en términos de componentes, está claro que  $A$  debe ser un tensor-(1, 1), de lo contrario rompemos la convención de sumación de Einstein. Es decir que

$$A^a{}_m v^m = \lambda \cdot v^a$$

es la única posición válida para el índice. Si representamos  $A$  como una matriz, un resultado de álgebra lineal bien conocido nos indica que podemos llevarlo a la forma

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d),$$

donde  $d$  es la dimensión del espacio vectorial.

<sup>3</sup>De nuevo esta carta no cubre la variedad completa, sino que requiere que removamos dos puntos antípodas y una línea de longitud. Téngase en cuenta también que no hemos equipado la variedad con una conexión y por tanto realmente no tiene forma!

<sup>4</sup>La notación aquí significa simplemente que reunimos los 4 componentes de  $g$  en una matriz donde  $i$  nos indica la fila y  $j$  nos indica la columna. Para más información al respecto véase, por ejemplo, la sección 1.5 de *Variedades, tensores y formas: Una introducción para matemáticos y físicos* por Paul Renteln.

Queremos tener algo similar para tensores de diferentes rangos. Para tensores- $(0, 2)$ , en particular la métrica, tenemos la *firma* de  $g$  la cual tiene sólo  $+1, -1$ , y  $0$  en la diagonal. Sin embargo, hay que tener cuidado, porque estos no son simplemente "eigenvalues" para  $g$ ; la primera razón es que acabamos de decir que los eigenvalues sólo tienen sentido para tensores- $(1, 1)$ , y resulta además que *siempre* podemos transformar a una carta tal que la firma sea *solamente*  $+1, -1$  y  $0$ s, que, en general, no se puede hacer con los eigenvalues.

Lo que realmente queremos definir como firma es el doble  $(p, q)$  donde  $p$  es el número de  $+1$ s y  $q$  es el número de  $-1$ s. Esta es la definición que vamos a usar en estas notas, por es importante tener en cuenta que otros se refieren a la firma de diferente manera, pero relacionado.<sup>5</sup>

*Afirmación 10.2.1.* La firma es independiente de la elección de cartas. Es decir que los valores de  $p$  y  $q$  no depende de la base que se usa para escribir los componentes de la matriz.

*Notación.* Usaremos la notación estándar de  $+$ s y  $-$ s como una tupla- $d$  para indicar la firma. Por ejemplo si  $d = 3$ ,  $p = 2$  y  $q = 1$  escribimos  $(+, +, -)$ . La posición en la tupla corresponde a los componentes métricos correspondientes. Así, por ejemplo,  $g_{11} = 1$ ,  $g_{22} = 1$  y  $g_{33} = -1$  en esta base.

*Observación 10.2.2.* En lo que realmente estamos interesados es en el signo *relativo* entre los componentes de la métrica, y por tanto podríamos haber cambiado  $p \leftrightarrow q$  en la definición y proceder a partir de ahí, es decir que el ejemplo en la notación anterior se convertiría en  $(-, -, +)$ . No importa el que elijamos, con tal de mantener la consistencia. Nuestra elección de firma está dada por las dos definiciones siguientes.

**Definición** (Métrica Riemanniana). Una métrica es denominada **Riemanniana** si su firma es  $(+, +, \dots, +)$ .

Una métrica con cualquier otra firma (aparte de  $(-, -, \dots, -)$  por supuesto) es denominada *pseudo-Riemanniana*. El siguiente caso es de particular relevancia en la relatividad general.

**Definición** (Métrica Lorentziana). Se llama **Lorentziana** a una métrica si su firma es  $(+, -, \dots, -)$ .

*Observación 10.2.3.* La convención dada para la métrica Riemanniana es la que casi siempre se usa, sin embargo para la métrica Lorentziana es alrededor de 50/50 dividido entre los que usan  $(+, -, \dots, -)$  y los que usan  $(-, +, \dots, +)$ . Nosotros usaremos la dada en la definición.<sup>6</sup>

<sup>5</sup>Por ejemplo hay quien llama firma al número único  $(-1)^q$ . Esto sólo indica si hay un número par o impar de  $-1$ s. Esta convención sólo se usa cuando se considera el caso en que no hay  $0$ s, lo cual es cierto si el tensor es no-degenerado, p.ej., el métrico.

<sup>6</sup>Personalmente prefiero la segunda, ya que prefiero pensar en longitudes espaciales como positivas (enseguida veremos el sentido a esta declaración), sin embargo me ceñiré a la del Dr. Schuller por consistencia con los vídeos. Esta nota al pie es simplemente un aviso de que podría (aunque espero que no) usar la convención errónea más adelante en algún cálculo

### Ejercicio

Mostrar que la condición de no-degeneración para una métrica Riemanniana es equivalente a la no-degeneración de un producto interno. Es decir

$$g(X, Y) = 0, \quad \forall Y \in \Gamma T\mathcal{M} \iff X = 0.$$

*Pista: pensemos en lo que significa que una matriz sea invertible y a continuación descomponer  $X$  e  $Y$  en una base.*

## 10.3 Longitud De Una Curva

Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  una curva suave, por lo que conocemos su velocidad  $v_{\gamma, \gamma(\lambda)}$  en cada  $\gamma(\lambda) \in \mathcal{M}$ . Esto es lo más lejos que podemos llegar en una variedad topológica, pero en una variedad métrica tenemos lo siguiente.

**Definición** (Rapidez de una curva). En una variedad métrica de Riemann  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$ , la **rapidez** de una curva en  $\gamma(\lambda)$  es el número

$$s(\lambda) := \sqrt{g(v_\gamma, v_\gamma)} \Big|_{\gamma(\lambda)}$$

*Observación 10.3.1.* (Comentario de Dr Schuller: la fórmula "siente que necesita la métrica"). La velocidad (*velocity*) está definida pero no la "rapidez" (*speed*). Aunque cabría esperar que los componentes de la velocidad  $v^a$  tuvieran unidades  $LT^{-1}$ , esto no es verdad; tienen unidades  $T^{-1}$ . La "pérdida" aparente de la distancia viene del hecho que los componentes son objetos dependientes de la carta y la distancia no tiene significado en una carta, por lo que no podemos asignarles unidades físicas. La *velocidad*, sin embargo, tiene unidades  $LT^{-1}$ , lo cual nos indica que los componentes de la métrica deben tener unidades  $L^2$ .

**Definición.** Sea  $\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathcal{M}$ <sup>7</sup> una curva suave. Entonces la **longitud** de  $\gamma$  es el número <sup>8</sup>

$$L[\gamma] := \int_0^1 d\lambda s(\lambda).$$

Lo que acabamos de ver es que la velocidad (*velocity*) es realmente el objeto fundamental y de ahí derivamos la rapidez (*speed*) de una curva. Esto es totalmente opuesto a lo que hemos estudiado en la escuela!

*Ejemplo 10.3.2.* Volvamos de nuevo a la esfera redonda de radio  $R$ . Consideremos su ecuador,

$$\begin{aligned} \theta(\lambda) &:= (x^1 \circ \gamma)(\lambda) = \frac{\pi}{2} \\ \varphi(\lambda) &:= (x^2 \circ \gamma)(\lambda) = 2\pi\lambda^3. \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Tenemos libertad para elegir que el dominio  $\gamma$  sea  $(0, 1)$  simplemente re-escalando/moviendo  $\lambda$  en consecuencia.

<sup>8</sup>Hemos usado abajo corchetes alrededor de  $\gamma$  porque es una función. Esto nos dice que  $L$  es, así llamada, *funcional*. Cualquier persona no familiarizada con esta terminología es referida a un curso de mecánica Lagrangiana.

La longitud de esta curva es

$$L[\gamma] = \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{ij} \left( x^{-1}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda)) \right) (x^1 \circ \gamma)'(\lambda) (x^2 \circ \gamma)'(\lambda)}.$$

Usando

$$g_{ij} = \text{diag}(R^2, R^2 \sin^2 \theta), \quad \theta'(\lambda) = 0, y \varphi'(\lambda) = 6\pi\lambda^2,$$

tenemos

$$\begin{aligned} L[\gamma] &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{R^2 \sin^2(\theta(\lambda)) 36\pi^2 \lambda^4} \\ &= 6\pi R \int_0^1 \sin(\pi/2) \lambda^2 \\ &= 6\pi R \cdot \frac{1}{3} \\ &= 2\pi R. \end{aligned}$$

Nótese que aunque en el ejemplo anterior hemos usado una parametrización aparentemente curiosa (es decir  $\lambda^3$  no es exactamente  $\lambda$ ), la respuesta salió como queríamos. Obviamente es así porque en ninguna parte dijimos nada sobre como parametrizar la curva. Físicamente tiene sentido que la longitud de la curva sea independiente de eso: la longitud de un paseo no depende de la rapidez con que lo hagamos, o si lo hacemos a velocidad constante (con tal de que no nos demos la vuelta y caminemos hacia atrás en algún punto). Esto puede ser expresado muy bien mediante el siguiente teorema.

**Teorema 10.3.3.** *Sea  $\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathcal{M}$  una curva suave y sea  $\sigma : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  suave, biyectiva y creciente, entonces  $L[\gamma] = L[\gamma \circ \sigma]$ .*

## 10.4 Geodésicas

**Definición** (Geodésica). Una curva  $\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathcal{M}$  es denominada **geodésica** en una variedad Riemanniana  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$  si es una curva *estacionaria*<sup>9</sup> con respecto a la longitud funcional  $L$ .

**Teorema 10.4.1.** *La curva  $\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathcal{M}$  es una geodésica si y sólo si satisface las ecuaciones de Euler Lagrange para el Lagrangiano*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : T\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto \sqrt{g(X, X)}. \end{aligned}$$

En una carta, esto es

$$\mathcal{L}(\gamma^i, \dot{\gamma}^i) = \sqrt{g_{ij}(\gamma(\lambda)) \dot{\gamma}^i(\lambda) \dot{\gamma}^j(\lambda)}.$$

<sup>9</sup>En el sentido Lagrangiano de mecánica clásica.

Para hallar las ecuaciones de Euler Lagrange se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^m} &= \frac{1}{\sqrt{\dots}} g_{mj}(\gamma(\lambda)) \dot{\gamma}^j(\lambda) \\ \therefore \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^m} \right) &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{\dots}} \right) g_{mj}(\gamma(\lambda)) \dot{\gamma}^j(\lambda) + \frac{1}{\sqrt{\dots}} \left( g_{mj}(\gamma(\lambda)) \ddot{\gamma}^j(\lambda) + \dot{\gamma}^s(\lambda) [\partial_s g_{mj}(\gamma(\lambda))] \dot{\gamma}^j(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Ahora estamos atascados con la ingrata tarea de calcular  $\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{\dots}} \right)$ . Sin embargo, ya hemos demostrado que la longitud de una curva es independiente de la elección del parámetro. Tenemos libertad, por lo tanto, para elegirlo de la forma más conveniente, así que simplemente lo tomamos de manera que sea  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ , es decir que la velocidad sea uno a lo largo de toda la curva. Entonces tenemos

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^m} \right) = g_{mj}(\gamma(\lambda)) \ddot{\gamma}^j(\lambda) + \dot{\gamma}^s(\lambda) (\partial_s g_{mj}(\gamma(\lambda))) \dot{\gamma}^j(\lambda).$$

También tenemos que hallar

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^m} = \frac{1}{2} (\partial_m g_{ij}(\gamma(\lambda))) \dot{\gamma}^i(\lambda) \dot{\gamma}^j(\lambda),$$

donde hemos impuesto nuestra condición de elección del parámetro. Por lo tanto las ecuaciones de Euler Lagrange son (descartando las  $(\lambda)$ s para brevedad de la notación)

$$g_{mj} \ddot{\gamma}^j + (\partial_i g_{mj}) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j - \frac{1}{2} (\partial_m g_{ij}) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0.$$

Multiplicando ambos lados por la métrica inversa  $g^{mq}$  y usando la condición  $g^{mq} g_{mj} = \delta_j^q$ , tenemos

$$\ddot{\gamma}^q + g^{qm} \left( \partial_i g_{mj} - \frac{1}{2} \partial_m g_{ij} \right) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0,$$

donde el paréntesis en los dos últimos índices indican la simetría  $\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^i$ . Usando esta simetría podemos duplicar el primer término permutando  $i \leftrightarrow j$ , lo que nos da

$$\ddot{\gamma}^q + \frac{1}{2} g^{qm} (\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0.$$

Esta es la **ecuación geodésica** para los componentes de  $\gamma$  en una carta. Podemos escribir esto en la forma de una ecuación autoparalela<sup>10</sup> introduciendo la siguiente definición.

**Definición** (Símbolos de Christoffel). Dada una métrica  $g$  y una carta  $(U, x)$ , definimos los **símbolos de Christoffel** (o **coeficientes de conexión Levi-Civita**) como

$${}^{LC}\Gamma_{ij}^q(\gamma(\lambda)) := \frac{1}{2} g^{qm} (\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}),$$

donde los componentes de la métrica (y su inversa, obviamente) están tomados en la carta dada.

<sup>10</sup>Es decir, en la forma  $\ddot{\gamma}^q + \Gamma_{ij}^q \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j$ .

Notación. Podemos aligerar algo la notación definiendo

$$g_{ij,m} := \partial_m g_{ij},$$

e igualmente para cualquier otro rango de tensor. Es decir, simplemente indicamos una derivada parcial en una carta mediante una coma y el índice entiende que esta es la entrada de la derivada. Esta notación es muy útil, ya que puede ser usada junto con la de punto y coma para la derivada covariante.

$$T_{jk;i} := (\nabla_i T)_{jk}$$

Adoptaremos esta notación en estas notas, sin embargo el lector es prevenido de que el Dr. Schuller no usa esta notación, para asegurarse de que pueda hacer la transición entre las dos cuando compare estas notas con las de las sesiones ("lectures")

Este proceso, específicamente el punto en el cual decimos que las  ${}^{LC}\Gamma$ s vienen de una conexión,  ${}^{LC}\nabla$ , identifica las curvas<sup>11</sup> más cortas (geodésicas) con curvas rectas (autoparalelas). Hacer esto, físicamente, es algo claramente muy razonable y correcto. Es importante tener en cuenta, sin embargo, que hasta este punto, geodésicas y autoparalelas son entidades completamente separadas.

Nótese que haciendo esta identificación, obtenemos la conexión *desde* la métrica. Es decir, no necesitamos proveer ambas, una métrica y una conexión, sino que proporcionando una métrica podemos obtener una conexión única de manera que las curvas más cortas y las curvas rectas (curvas directas) coincidan. Esto suena como algo dependiente de la carta, y por tanto nada interesante para hacer. Sin embargo, el siguiente teorema nos pone a pensar en este punto, haciéndonos ver que todo está OK.

**Teorema 10.4.2.** *Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g, \nabla)$  una variedad topológica equipada con ambas, una métrica y una conexión. Si*

(i)  $\nabla$  es libre de torsión, y

(ii)  $\nabla g = 0$ , conocida como compatibilidad métrica,

entonces podemos concluir que  $\nabla = {}^{LC}\nabla$ .

*Proof.* Ver los tutoriales. □

### Ejercicio

Mostrar que la condición de compatibilidad métrica nos permite ‘mover la métrica hacia adentro y hacia afuera de la derivada covariante’. Es decir,

$$g \cdot \nabla T = \nabla g \cdot T.$$

Para finalizar esta clase, introduciremos algunas definiciones. Como vemos, todas ellas están relacionadas con la métrica.

<sup>11</sup>Una vez más, estrictamente hablando son justo curvas máximas, por lo que también es cierto para las curvas más largas y las curvas correspondientes a puntos de inflexión.



**Definición** (Curvatura Riemann Christoffel). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$  una variedad métrica. Los componentes de la **curvatura Riemann Christoffel** están definidos mediante

$$\text{Riem}_{abcd} := g_{am} \text{Riem}^m_{bcd},$$

donde  $\text{Riem}^m_{bcd}$  son los componentes del tensor de Riemann obtenidos a partir de la conexión Levi-Civita  ${}^{LC}\nabla$ .

**Definición** (Escalar Ricci). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$  una variedad métrica y sea  $\text{Riem}$  el tensor de Riemann obtenido a partir de la conexión Levi-Civita. Definimos entonces el **escalar Ricci** como

$$R = g^{ab} \text{Ric}_{ab},$$

donde  $\text{Ric}_{ab} := \text{Riem}^c_{acb}$  son los componentes del tensor de curvatura de Ricci.

**Definición** (Curvatura Einstein). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$  una variedad métrica y sea  $\text{Riem}$  el tensor de Riemann obtenido de la conexión Levi-Civita. Definimos los componentes de la **curvatura Einstein** como

$$G_{ab} := \text{Ric}_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R,$$

donde  $\text{Ric}$  y  $R$  son la curvatura Ricci y el escalar Ricci, respectivamente.

Es importante señalar que estas cantidades no sólo están relacionadas con la métrica por su presencia directa en las expresiones, sino también por el hecho de que, para definir el tensor de curvatura de Riemann necesitamos una conexión y para todo ello hemos usado la conexión Levi-Civita, que es un objeto dependiente de la métrica. Por esta última razón, el tensor de curvatura de Ricci (definido previamente) es también un objeto dependiente de la métrica.

Tal como indican los nombres anteriores, acabamos de establecer un nexo entre la curvatura del espaciotiempo y la estructura métrica.<sup>12</sup> Este es el primer gran paso para comprender el más importante principio de la relatividad general: que la materia genera la curvatura del espaciotiempo.

*Observación 10.4.3.* Las definiciones anteriores pueden, por supuesto, ser expresadas de una manera libre de cartas ya que son tensores, sin embargo, la notación puede ser algo confusa y es mucho más fácil verlo en forma de componentes, de ahí que lo hayamos definido de esta manera.

#### Ejercicio

Mostrar que  $\text{Riem}_{abcd}$  se comporta correctamente en la transformación como los componentes de un campo tensor- $(0, 4)$ . De ahí, análogamente, se sigue que el resto de las definiciones son por supuesto tensores.

<sup>12</sup>De hecho hemos hecho esta identificación desde el momento en que hicimos coincidir las geodésicas y las autoparalelas, ya que entonces establecimos la unión entre la métrica y la derivada covariante, la cual hemos visto que codifica la curvatura.

# 11 | Simetría

Tenemos la idea intuitiva de que la esfera redonda de radio  $R$ ,  $(S^2, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g^{\text{redonda}})$ , tiene *simetría rotacional*, mientras que la patata  $(S^2, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g^{\text{patata}})$  no la tiene.

Previo a este curso <sup>1</sup> nos enseñaron a pensar en simetrías como un grupo de mapas que mapean el objeto a sí mismo, a la vez que preservan todas las estructuras del objeto. Por ejemplo, la simetría rotacional tridimensional viene dada por el grupo  $SO(3)$ . Impartiendo esa lección, hacíamos uso del producto interno (*inner product*) disponible para nosotros. El método que vamos a describir aquí es sutilmente diferente. Como acabamos de ver antes, obtenemos la simetría a través de la métrica. Es decir, las simetrías *no* son una cosa más que introducimos cuando proporcionamos la métrica, sino que vienen como consecuencia de *cuál* es la métrica que proporcionamos. Ahora parece razonable pensar ‘bien, la métrica proporciona un producto interno en cada espacio tangente, así que podemos hacer una conexión con la idea previamente aprendida? Aquí es donde viene la idea sutil. Lo que en realidad son las métricas es un *campo* tensor, y así este nos dice cómo *distribuir* esos productos internos por todos los espacios tangente. Por lo tanto la simetría aparece, no viniendo de los ‘propios productos internos’, sino en cierta manera de su distribución en la variedad.

Queremos entonces responder a la pregunta ‘cómo describimos la simetría de una métrica?’ No se trata simplemente de una cuestión de interés académico, sino que en realidad es muy importante a la hora de estudiar las soluciones físicas. Por ejemplo, la única manera de resolver las ecuaciones de Einstein es proporcionando unas condiciones de simetría para el espaciotiempo (es decir, el Universo).

## 11.1 Mapa de avance (*Push-Forward Map*)

**Definición** (Mapa de Avance). Sea  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un mapa suave entre dos variedades suaves. Definimos entonces el **mapa de avance**  $\phi_* : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}$  por

$$\phi_*(X)\langle f \rangle := X\langle f \circ \phi \rangle,$$

donde  $f \in C^\infty(\mathcal{N})$ , es decir  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Esquemáticamente, los mapas de la definición anterior se relacionan mediante el siguiente diagrama.

---

<sup>1</sup>Bueno, así fue en mi caso y espero que en el del lector también.

$$\begin{array}{ccc}
 T\mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_*} & T\mathcal{N} \\
 \pi_{\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{N}} \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{N} \xrightarrow{f} \mathbb{R}
 \end{array}$$

**Corolario 11.1.1.** Recordemos que las fibras del haz tangente son justamente los espacios tangentes a ese punto, es decir  $\text{preim}_{\pi_{\mathcal{M}}} p = T_p \mathcal{M}$ . Se sigue, entonces, que

$$\phi_*(T_p \mathcal{M}) \subseteq T_{\phi(p)} \mathcal{N}.$$

es decir, la imagen de las fibras- $p$  en  $\mathcal{M}$  están al menos contenidas dentro de las fibras- $\phi(p)$  en  $\mathcal{N}$ .

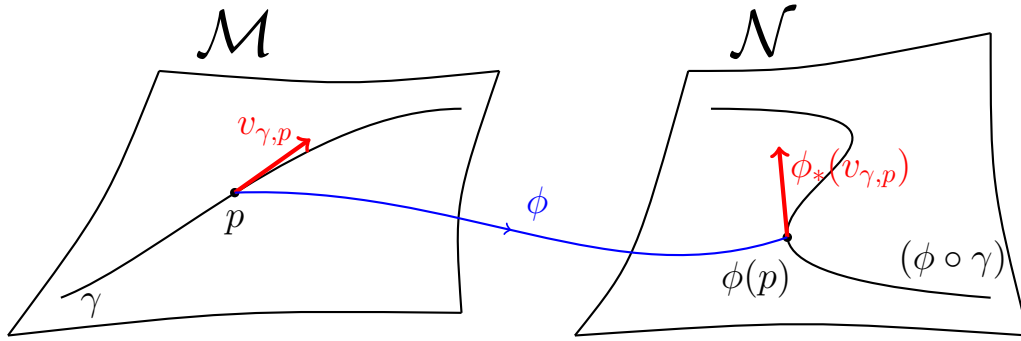
Hay un mnemónico para recordar lo que hace el empuje hacia adelante (*push forward*): "los vectores son empujados hacia adelante".

Vale la pena mirar a los componentes del mapa de avance en las *dos* cartas  $(U, x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$  y  $(V, y) \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ . Tenemos, para  $p \in \mathcal{M}$

$$\phi_*^a := dy^a : \phi_* \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \phi_* \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) \langle y^a \rangle = \frac{\partial (y \circ \phi)^a}{\partial x^i} =: \frac{\partial \hat{\phi}^a}{\partial x^i},$$

donde  $a \in \{1, \dots, \dim \mathcal{N}\}$  y  $i \in \{1, \dots, \dim \mathcal{M}\}$ . Nótese que  $\hat{\phi} := (y \circ \phi)$  es un mapa  $\hat{\phi} : U \rightarrow \mathbb{R}^{\dim \mathcal{N}}$ .

La siguiente figura nos da una bonita descripción gráfica del mapa de avance.



**Figura 11.1:** Dadas dos variedades suaves y un mapa suave  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , el mapa de avance,  $\phi_*$ , mapea el vector tangente,  $v_{\gamma,p}$  de la curva  $\gamma$  en el punto  $p \in \mathcal{M}$  al correspondiente vector tangente,  $\phi_*(v_{\gamma,p})$ , de la curva  $(\phi \circ \gamma)$  en el punto  $\phi(p) \in \mathcal{N}$ .

**Corolario 11.1.2.** Observando la Figura 11.1, vemos que  $\phi_* : v_{\gamma,p} \mapsto v_{(\phi \circ \gamma), \phi(p)}$ .

*Proof.* Sea  $f \in C^\infty(\mathcal{N})$  y sea  $p \in \mathcal{M}$  tal que  $\gamma(\lambda_0) = p$ . Entonces

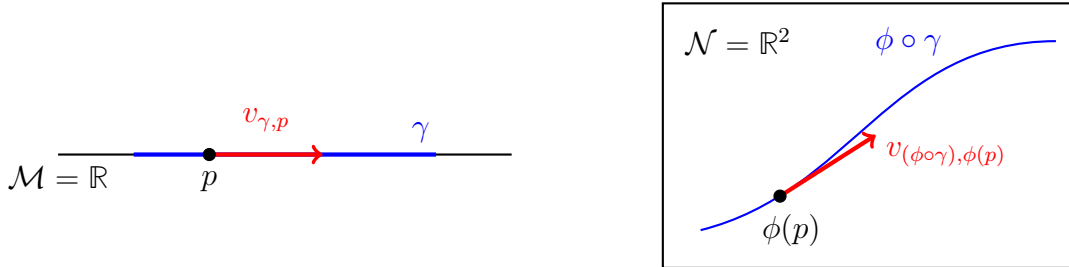
$$\begin{aligned}\phi_*(v_{\gamma,p}) &:= v_{\gamma,p}(f \circ \phi) \\ &= ((f \circ \phi) \circ \gamma)'(\lambda_0) \\ &= (f \circ (\phi \circ \gamma))'(\lambda_0) \\ &= v_{(\phi \circ \gamma), (\phi \circ \gamma)(\lambda_0)} \\ &= v_{(\phi \circ \gamma), \phi(p)}.\end{aligned}$$

□

*Ejemplo 11.1.3.* Un ejemplo importante/interesante del uso del empuje hacia adelante  $\phi$  es un mapa *embebido*<sup>2</sup> desde una variedad de dimensión- $d$  a una variedad de dimensión- $(d+1)$ .

Por razones gráficas obvias, sea  $d = 1$ .<sup>3</sup> Si  $\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathcal{M}$  es una curva en esta variedad de dimensión-1, entonces  $v_{\gamma,p}$  es un elemento del espacio tangente 1-dimensional  $T_p\mathcal{M}$ . Sea  $\phi : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$  una incrustación de  $\mathcal{M}$  en  $\mathcal{N}$ , donde  $\dim \mathcal{N} = 2$ . Entonces la velocidad  $v_{(\phi \circ \gamma), \phi(p)}$  es un elemento del espacio tangente de 2-dimensiones  $T_{\phi(p)}\mathcal{N}$ . Esto nos permite hacer una conexión entre el vector *intrínseco*  $v_{\gamma,p}$  y el vector *extrínseco*  $v_{(\phi \circ \gamma), \phi(p)}$ .

A modo de analogía, consideremos el caso de una hormiga andando a lo largo de un cable sobre una mesa. El vector  $v_{\gamma,p}$  sería lo que la hormiga (que es ajena al espacio dimensional superior) entiende lo que para ella es la velocidad, mientras que  $v_{(\phi \circ \gamma), \phi(p)}$  es lo que nosotros (que tenemos una vista de pájaro de la mesa) diríamos que es la velocidad.



## 11.2 Mapa de retroceso (Pull-back Map)

**Definición** (Pull-back). Sea  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un mapa suave entre dos variedades suaves. Definimos el **mapa de retroceso** como  $\phi^* : T^*\mathcal{N} \rightarrow T^*\mathcal{M}$  mediante

$$\phi^*(\omega) : X := \omega : \phi_*(X).$$

para  $\omega \in T^*\mathcal{N}$  y  $X \in T\mathcal{M}$ .

<sup>2</sup>Es importante que usemos aquí una incrustación (*embedding*) y no una *inmersión*, la cual puede tener auto-intersecciones. Si tuviéramos auto-intersecciones no tendríamos un único vector tangente en la curva mapeada. Para más detalles sobre inmersiones e intersecciones véase la sección 3.6 del libro de texto de Renteln's *Manifolds, Tensors and Forms* de Renteln.

<sup>3</sup>Podríamos usar también  $d = 2$ , pero sería bastante más difícil dibujarlo en Tikz, por eso he elegido  $d = 1$ .

Echemos de nuevo un vistazo a los componentes con respecto a las dos cartas  $(U, x) \in \mathcal{A}_M$  y  $(v, y) \in \mathcal{A}_N$ .

$$\phi^* a_i := \phi^*((dy^a)_{\phi(p)}) : \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = (dy^a)_{\phi(p)} : \phi_* \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) =: \phi_*^a_i,$$

así pues, los componentes del mapa de retroceso y los del mapa de avance son los mismos!

Justo como hemos mostrado que el avance de la velocidad a una curva es la velocidad de la curva mapeada, el retroceso del gradiente de una función es el gradiente de una función que está mapeada en la otra función. Es decir

$$\phi^*(df) = d(f \circ \phi).$$

Este resultado puede ser obtenido de manera similar al cálculo del avance (véase el tutorial), o se deduce inmediatamente de las siguientes proposición y definición.

**Proposición 11.2.1.** *El mapa de retroceso y el mapa  $d$  conmutan. Es decir*

$$\phi^*(d\bullet) = d(\phi^*\bullet).$$

**Definición.** Sea  $\phi : M \rightarrow N$  un mapa suave entre dos variedades suaves. Entonces el retroceso de  $f \in C^\infty(N)$  viene dado por

$$\phi^*(f) := f \circ \phi.$$

La frase nemónica aquí es "los covectores se repliegan (*covectors are pulled back*)."

### 11.3 Métrica inducida

Hay una aplicación importante para el retroceso (*pull-back*). Consideremos una vez más  $\phi : M \hookrightarrow N$  como una incrustación con  $\dim M < \dim N$ . Equipemos ahora la variedad suave  $N$  con una métrica,  $g$ . Nos preguntamos ahora si podemos usar esta métrica para definir una en la variedad  $M$ , la cual denominaremos *métrica inducida*,  $g_M$ . La métrica es un campo tensor-(0, 2), y por tanto la podemos retroceder (*pull-back*). La pregunta a responder es "Pero cómo definimos esa métrica?"

La forma de resolver esto es la siguiente. Queremos hallar la longitud de una ruta,  $\gamma$ , entre dos puntos en  $M$  usando  $g_M$ . Tomamos el valor como la longitud de la ruta mapeada,  $\gamma \circ \phi$ , obtenido usando  $g$ .

Ahora, obviamente, hay más de una manera para embeber (incrustar) el espacio. Cada una de estas incrustaciones nos da una longitud potencial diferente, y por tanto define una métrica (y una forma) diferente para  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ . Usando el ejemplo utilizado varias veces en estas notas, la variedad suave  $(S^2, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  puede ser o bien una esfera redonda de radio  $R$  o una patata. Podemos decidir cuál es definiendo una incrustación tal que la métrica inducida  $\phi : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  proporcione la forma correcta. Esto es lo que nuestros ojos hacen cuando diferenciamos un balón de fútbol <sup>4</sup> de una patata; observan las longitudes entre puntos usando nuestra métrica euclídea-3D y concluyen que la métrica inducida es la de un balón de fútbol (o una patata).

Podemos escribir esto matemáticamente como la siguiente definición.

---

<sup>4</sup>Para algunos "Soccer".

**Definición** (Métrica Inducida). Sean  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  y  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  unas variedades suaves, con  $|\mathcal{M}| \leq |\mathcal{N}|$ .<sup>5</sup> y sea  $\phi : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$  una incrustación. Ahora equipamos  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  con una métrica  $g$ . Definimos la **métrica inducida** en  $\mathcal{M}$  como el retroceso ("pull-back")  $g_{\mathcal{M}} := \phi^*g$ , que satisface<sup>6</sup>

$$g_{\mathcal{M}}(X, Y) := g(\phi_*(X), \phi_*(Y)),$$

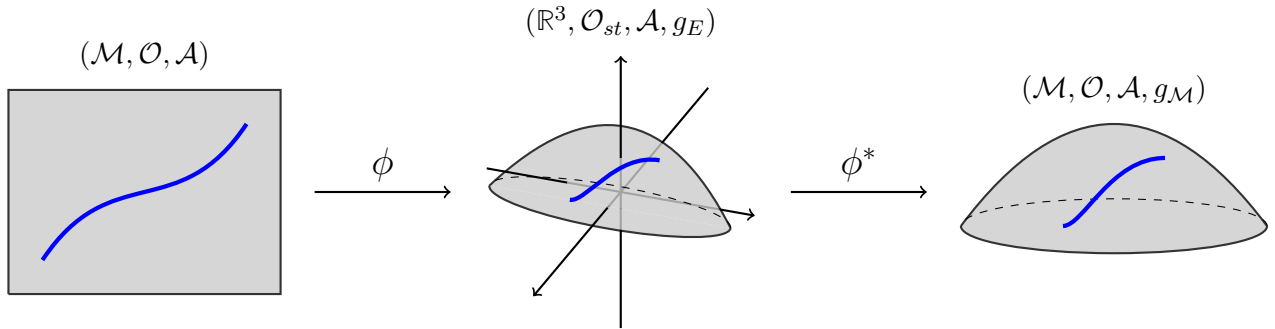
para todo  $X, Y \in \Gamma T\mathcal{M}$ .

La condición anterior en la definición puede ser descrita en componentes como

$$(g_{\mathcal{M}})_{ij} = g_{ab} \frac{\partial \hat{\phi}^a}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial x^j},$$

donde  $\hat{\phi} = (y \circ \phi)$ , como en el cálculo de componentes del avance.

*Ejemplo 11.3.1.* En los diagramas siguientes podemos ver gráficamente las ideas anteriores. Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  una variedad suave de 2 dimensiones y sea  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g) = (\mathbb{R}^3, \mathcal{O}_{st}, \mathcal{A}, g_E)$ , el espacio euclídeo-3. Podríamos definir una incrustación  $\phi : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  se vea en forma de cúpula con respecto a la métrica  $g_E$ . Podemos entonces retraer esta métrica a la variedad misma  $\mathcal{M}$ , obteniendo el espacio métrico inducido  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g_{\mathcal{M}})$ .



Es importante notar que sólo tenemos una forma de cúpula en ambos, tanto en la incrustación como en la métrica inducida porque estamos considerando que el espacio embebido es euclídeo-3. Es decir, en el diagrama dibujado de la parte derecha extrema, lo estamos viendo como embebido en el espacio euclídeo-3. A esto se refería el comentario sobre lo que nuestros ojos hacen para diferenciar un balón de fútbol de una patata.

## 11.4 Flujo de un Campo Vectorial Completo

**Definición** (Curva Integral). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  una variedad suave y sea  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$  una curva suave con  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ . Si tenemos un campo vectorial  $X \in \Gamma T\mathcal{M}$ , entonces decimos que  $\gamma$  es una *curva integral* de  $X$  si

$$v_{\gamma, \gamma(\lambda)} = X_{\gamma(\lambda)}.$$

Es decir, los vectores tangentes a la curva reproducen el campo vectorial restringido a la curva.

<sup>5</sup>Las líneas verticales indican la llamada cardinalidad del conjunto, es decir cuántos elementos contiene.

<sup>6</sup>El avance de un campo vectorial está simplemente definido de forma puntual, es decir avanzamos cada vector y formamos un campo vectorial.

*Ejemplo 11.4.1.* Un ejemplo de una curva integral sería el correspondiente a un barco de papel flotando en un río. El campo vectorial  $X$  sería el campo de velocidad de las moléculas de agua y la curva  $\gamma$  sería la trayectoria del barco.

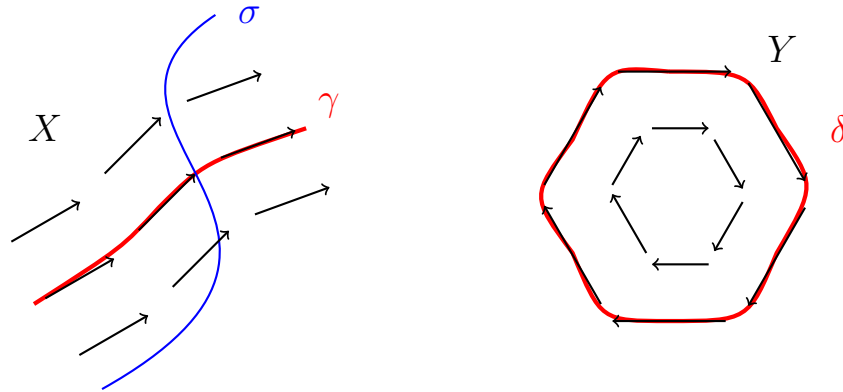
**Definición** (Campo Vectorial Completo). Un campo vectorial  $X \in \Gamma T\mathcal{M}$  es denominado **completo** si todas las curvas integrales tienen el dominio  $\mathbb{R}$  (es decir,  $(a, b) = \mathbb{R}$ ).

Se tiende pensar que esto siempre es posible porque simplemente podemos parametrizar  $\gamma$  de manera que  $(a, b) = \mathbb{R}$ , correcto? Bien, es verdad que podemos hacer esto, pero al hacerlo cambiamos el valor absoluto/ longitud de los vectores tangente y entonces ya no pueden coincidir con los vectores del campo vectorial. De ahí la elección de parametrización si se elige por los valores absolutos de los vectores en el campo vectorial

Siguiendo desde el punto anterior, nótese que para que un campo vectorial sea completo es importante que no removamos puntos del dominio del campo vectorial. Si hiciéramos eso, la curva integral a través de esos puntos tendría entonces longitud finita y por tanto no podríamos extender el intervalo  $(a, b)$  al total de  $\mathbb{R}$  sin romper la naturaleza integral de la curva. Esto es realmente un punto importante porque abre el camino a una comprensión adecuada de los teoremas de la singularidad <sup>7</sup>.

Este resultado está contenido en el siguiente teorema.

**Teorema 11.4.2.** *Un espacio vectorial suave, soportado de forma compacta<sup>8</sup> es completo.*



**Figura 11.2:** Izquierda:  $\gamma$  es una curva integral del campo vectorial suave  $X$ , ya que sus vectores tangentes en todos los puntos reproducen el campo vectorial en esos puntos.  $\sigma$  no es una curva integral ya que los vectores tangentes no coinciden con los vectores del campo vectorial en cada punto. Derecha: Ejemplo de un campo vectorial completo,  $Y$ . Las curvas integrales,  $\delta$ , son cerradas y por lo tanto tienen  $\mathbb{R}$  como dominio. Si fuésemos a remover un punto en el espacio, ya no tendríamos un campo vectorial completo ya que una de las curvas integrales tendría entonces longitud finita

<sup>7</sup>Una singularidad puede ser imaginada como un punto que es removido del espacio tiempo porque, por ejemplo, la curvatura explota ahí.

<sup>8</sup>Se dice que un espacio topológico es compacto si cada recubrimiento abierto (*open cover*) tiene un número finito de subcubrimientos (*subcover*). Para más detalles véase, p.ej., el libro de texto de Renteln: Manifolds, Tensors, and Forms.

**Definición** (Flujo de un Campo Vectorial Completo). El **flujo de un campo vectorial completo**  $X \in \Gamma T\mathcal{M}$  es una familia de parámetros

$$\begin{aligned} h^X : \mathbb{R} \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (\lambda, p) &\mapsto \gamma_p(\lambda), \end{aligned}$$

donde  $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  es la curva integral de  $X$  con  $\gamma(0) = p$ .

Podemos usar la definición anterior para introducir un nuevo mapa simplemente tomando un valor fijo para  $\lambda$ . Es decir, para una  $\lambda \in \mathbb{R}$  fija tenemos un mapa suave

$$h_\lambda^X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M},$$

que toma cada punto en  $\mathcal{M}$  y lo mueve una distancia de parámetro  $\lambda$  a lo largo de la curva integral por ese punto.

### 11.5 Subálgebras de Lie del Álgebra de Lie $(\Gamma T\mathcal{M}, [\cdot, \cdot])$ de Campos Vectoriales

**Definición** (Álgebra de Lie). Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial<sup>9</sup>  $\mathfrak{g}$  equipado con una operación bilineal  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , conocida como el **corchete de Lie**, que también cumple

- (i) Antisimetría:  $[x, y] = -[y, x]$ ,
- (ii) La *identidad de Jacobi*:  $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$

**Definición** (Constantes de Estructura). Sea  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  un álgebra de Lie. Definimos las **constantes de estructura** de un álgebra de Lie,  $C_{ij}^k \in \mathbb{F}$ , mediante

$$[x_i, x_j] = C_{ij}^k x_k$$

para  $x_i \in \mathfrak{g}$  e  $i, j, k \in \{1, \dots, \dim \mathfrak{g}\}$ .

Recordemos que en la sesión 8 hemos definido el conmutador de dos campos vectoriales como

$$[X, Y]\langle f \rangle = X\langle Y\langle f \rangle \rangle - Y\langle X\langle f \rangle \rangle.$$

Queremos convertir esto en un corchete de Lie, sin embargo tenemos que resolver un problema. Tal como está, estamos considerando el módulo-  $(\Gamma T\mathcal{M}, \oplus, \odot) C^\infty$ , pero nuestro conmutador no obedece a la bilinealidad- $C^\infty$ . Es decir

$$[f \odot X, Y] \neq f \odot [X, Y].$$

Sin embargo, obedece a la bilinealidad- $\mathbb{R}$ .

**Proposición 11.5.1.** *Por lo tanto, si nos restringimos al espacio vectorial- $\mathbb{R}$   $(\Gamma T\mathcal{M}, +, \cdot)$  entonces el conmutador se convierte en un corchete de Lie.*

<sup>9</sup>De hecho sólo necesitamos un módulo sobre un anillo conmutativo.



*Notación.* Designaremos el álgebra de Lie de espacios vectoriales simplemente como  $(\Gamma T\mathcal{M}, [\cdot, \cdot])$ , pero es importante recordar que estamos considerando el caso restringido de  $\cdot : \mathbb{R} \times \Gamma T\mathcal{M} \rightarrow \Gamma T\mathcal{M}$ , es decir, el espacio vectorial- $\mathbb{R}$ .

### Ejercicio

- (a) Mostrar la desigualdad anterior,  $[f \odot X, Y] \neq f \odot [X, Y]$ .
- (b) Demostrar Proposición 11.5.1.

**Definición** (Subálgebra de Lie). Sea  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  un álgebra de Lie. Se dice que un subespacio vectorial  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$  es un **subálgebra de Lie** si está encerrado en el corchete de Lie. Es decir,  $[x, y] \in \mathfrak{a}$  para todo  $x, y \in \mathfrak{a}$ .

Si nos restringimos a la linealidad- $\mathbb{R}$ , obtenemos un espacio vectorial de dimensión infinita. Esto se debe al hecho de que sólo podemos escalar los campos vectoriales base por la misma cantidad en cada punto (como opuesto a hacerlo con la  $C^{\text{linealidad}-\infty}$ ), y por eso necesitamos un número infinito de ellos para tener una base completa. Sin embargo, podemos restringirnos a un subálgebra  $(\text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \dots, X_s\}, [\cdot, \cdot])$  de dimensión finita.

Ejemplo 11.5.2. Un ejemplo de una subálgebra tal de Lie en  $(S^2, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  es<sup>10</sup>

$$\mathfrak{so}(3) := (\text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, X_2, X_3\}, [\cdot, \cdot]),$$

donde

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_3, X_1] = X_2 \quad \text{y} \quad [X_2, X_3] = X_1.$$

Esto es una rotación de álgebra de Lie en 3 dimensiones, y es de aplicación importante en mecánica cuántica.<sup>11</sup>

Observación 11.5.3. En los tutoriales se muestra que

$$\begin{aligned} X_1(p) &= -\sin(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot(\theta(p)) \cos(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ X_2(p) &= \cos(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot(\theta(p)) \sin(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ X_3(p) &= \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

son de la forma anterior, lo que justifica por qué es frecuentemente denominado álgebra de rotación tridimensional.

Nótese que no estamos haciendo aquí referencia a la métrica en ningún momento, y por eso cualquier  $\{X_1, X_2, X_3\}$  que satisfaga lo anterior aplicará tanto a la esfera como a la patata.

<sup>10</sup>Esto se está poniendo un poco engorroso.  $\mathfrak{so}(3)$  es el álgebra de Lie de un grupo  $SO(3)$ , que es una variedad equipada con una estructura de grupo.

<sup>11</sup>Para más detalles ver las Clases del Dr. Schuller en el curso Quantum Theory.

## 11.6 Simetría

**Definición** (Simetría de una Métrica). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$  una variedad métrica, y sea  $\{X_1, \dots, X_s\} \subset \Gamma T\mathcal{M}$ . Definimos  $L := \text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \dots, X_s\}$ ; entonces se dice que el subálgebra de Lie de dimensión- $s$   $(L, [\cdot, \cdot])$  es una **simetría** de un campo tensor métrico  $g$ , si para toda  $X \in L$ .

$$g((h_\lambda^X)_*(A), (h_\lambda^X)_*(B)) = g(A, B),$$

para  $A, B \in T_p\mathcal{M}$  y  $(h_\lambda^X)_*$  es el avance del flujo de  $X$ . Alternativamente podemos escribirlo como

$$(h_\lambda^X)^*g = g,$$

donde  $(h_\lambda^X)^*$  es el retroceso asociado al flujo de  $X$ .

La primera parte de la definición anterior dice básicamente que el ángulo y la proyección entre  $A$  y  $B$  (que nos lo dice la métrica) no cambian si movemos ambos  $A$  y  $B$  a lo largo de las curvas integrales de  $X$ . Por ejemplo, para la esfera redonda de radio  $R$ , si movemos  $A$  y  $B$  alrededor de la esfera en la dirección-" $\theta$ ", entonces, obviamente, no cambia nada.

La segunda parte sólo dice que si movemos la métrica "hacia atrás" a lo largo de las curvas integrales, sigue pareciendo lo mismo. De nuevo, esto se ve intuitivamente claro para una esfera redonda cuando giramos la esfera. Sin embargo, no es cierto para la patata, porque al mover la métrica, se mueve la forma de la patata. Esta es precisamente la declaración de que la esfera redonda es rotacionalmente simétrica, pero no así la patata.

## 11.7 Derivadas de Lie

El test anterior para la simetría es muy intuitivo, pero su mayor inconveniente es que hay que hacer muchos cálculos. Por consiguiente, típicamente no usamos este método, sino en su lugar el siguiente.

De lo anterior se deduce que si, para todo  $X \in L$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(h_\lambda^X)^*g - g}{\lambda} = 0$$

se mantiene, entonces  $L$  es una simetría de  $g$ . Realmente damos a la parte izquierda su propia notación. Definimos la *derivada de Lie* de una métrica  $g$ , con respecto al campo vectorial  $X$  como

$$\mathcal{L}_X g := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(h_\lambda^X)^*g - g}{\lambda}.$$

La derivada de Lie es realmente bastante sutil de definir. La definición que hemos usado arriba se apoya en las ideas de retroceso que hemos tratado anteriormente y de ahí que lo imaginamos como comparar el tensor 'retraído' ("*dragged back*")<sup>12</sup> con el tensor tal como es. Para explicación adicional sobre esto véanse [estas notas](#).

<sup>12</sup>Arrastrado hacia atrás ("*dragged back*"), ya que el mapa  $h$  es un automorfismo, por lo que el retroceso simplemente arrastra los puntos hacia atrás.

*Observación 11.7.1.* Alternativamente, se puede definir la derivada de Lie usando la *fórmula de Cartan*. Esto es útil al tratar de la derivada de Lie de diferentes formas. No trataremos más este tema aquí, pero para el lector interesado la fórmula es  $\mathcal{L}_X := d\iota_X - \iota_X d$ .<sup>13</sup>

Hechos estos comentarios, realmente estamos definiendo la derivada de Lie de forma más bien abstracta, pero que se asemeja mucho a la definición de la derivada covariante.

**Definición** (Derivada de Lie). La *derivada de Lie*  $\mathcal{L}$  en una variedad suave  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  envía un par de un *campo* vectorial,  $X$ , y un *campo* tensor- $(p, q)$ ,  $T$ , a un campo tensor- $(p, q)$  de manera que: para  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$  y  $Y \in \Gamma T\mathcal{M}$ ,

- (i)  $\mathcal{L}_X = X\langle f \rangle$ ,
- (ii)  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ ,
- (iii)  $\mathcal{L}_X(T + S) = \mathcal{L}_X T + \mathcal{L}_X S$ ,
- (iv)  $\mathcal{L}_X(T(\omega, Y)) = (\mathcal{L}_X T)(\omega, Y) + T(\mathcal{L}_X \omega, Y) + T(\omega, \mathcal{L}_X Y)$  y de forma similar para tensores de diferentes rangos,
- (v)  $\mathcal{L}_{X+Y} T = \mathcal{L}_X T + \mathcal{L}_Y T$ .

Estas condiciones se parecen mucho a las de la derivada covariante, pero con la derivada de Lie no necesitamos proveer ninguna estructura extra, es decir, no necesitamos ninguna  $\Gamma$ . Se podría pensar que esto hace que la derivada de Lie sea una derivada más útil, sin embargo conlleva sus propios defectos.

Lo primero que observamos es que la entrada inferior en la derivada de Lie debe ser un *campo* vectorial. Esto es distinto a la derivada covariante, en la que ahí tomamos simplemente un vector. Esto viene de la idea de que tenemos que obtener el flujo de  $X$ , lo que claramente significa conocer  $X$  en una vecindad del punto, por lo que tiene que ser un campo. Además hay que tener en cuenta que la condición (ii) es algo que no existe en la definición de una derivada covariante. Tiene el drástico efecto de la condición (v) por la cual la derivada de Lie **no** es lineal- $C^\infty$  en la entrada inferior (como sí lo es la derivada covariante). Esto se deduce simplemente de

$$\mathcal{L}_f X Y = [fX, Y] = f[X, Y] - Y\langle f \rangle X.$$

#### Ejercicio

Hay que señalar otra diferencia importante. Recordemos que para los componentes de la derivada covariante de un tensor, cada índice superior viene con un signo  $+$  y cada índice inferior con un signo  $-$ . Para la derivada de Lie ocurre lo contrario. Es decir,

$$(\mathcal{L}_X T)^i_j = X^m \frac{\partial T^i_j}{\partial x^m} - \frac{\partial X^i}{\partial x^m} T^m_j + \frac{\partial X^m}{\partial x^j} T^i_m.$$

Mostrar que este resultado se mantiene.

Usando la relación del ejercicio anterior, la condición  $\mathcal{L}_X g = 0$  se convierte en algo fácil de resolver, y así obtenemos una bonita manera de ver si una métrica presenta una simetría.

<sup>13</sup> $d$  es la derivada exterior, que ya hemos mencionado en estas notas, y  $\iota_X$  es la llamada derivada interior con respecto a  $X$ .

### 11.7.1 Campos Vectoriales de Killing

**Definición** (Campo Vectorial de Killing). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$  una variedad métrica. Un campo vectorial  $K \in \Gamma T\mathcal{M}$  es denominado un **campo vectorial de Killing** (o simplemente campo de Killing) si es una simetría de la métrica, es decir  $\mathcal{L}_K g = 0$ , lo cual puede también escribirse como

$$K\langle g(X, Y) \rangle - g([K, X], Y) - g(X, [K, Y]) = 0.$$

El teorema de Noether nos dice que hay un enlace entre las simetrías y las leyes de conservación, y entonces vemos que los campos vectoriales de Killing corresponden a leyes de conservación. Por ejemplo, como veremos más adelante, el campo vectorial que corresponde a la traslación temporal  $\partial_0$  es un campo vectorial de Killing en un espaciotiempo de Minkowski, y da lugar a la conservación de la energía. De forma similar tenemos campos vectoriales de Killing para la conservación del momento.

#### Ejercicio

Mostrar que para la conexión Levi-Civita la condición de campo vectorial de Killing se convierte en

$$g(\nabla_X K, Y) + g(X, \nabla_Y K) = 0.$$

*Pista: Hay que usar ambas condiciones, la métrica compatible y la de libre de Torsión.*

## 12 | Integración

Esta sesión completa nuestro "salto de nivel" de análisis a nivel de carta, a análisis a nivel de variedad. Es el último paso en los cimientos matemáticos antes de entrar en la sesión siguiente para empezar a tratar la relatividad general en sí misma.

El objetivo es definir un concepto de integración a nivel de variedad, es decir, queremos ser capaces de calcular  $\int_{\mathcal{M}} f$  donde  $f$  es una función suave en  $\mathcal{M}$ . Para definir esto, necesitamos introducir una nueva estructura suave, conocida como la *forma volumen*. También tenemos que restringir nuestro atlas, lo que nos da la llamada *orientación*.

### 12.1 Repaso de la Integración en $\mathbb{R}^d$

El caso más simple es el de una función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en la que tenemos simplemente<sup>1</sup>

$$\int_{(a,b)} F := \int_a^b dx F(x),$$

donde la parte derecha es una conocida operación de integración (p.ej. integrales de Riemann).

A continuación podemos considerar  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Si vamos a hacer esto en un dominio con forma de caja,  $(a, b) \times \dots \times (u, v) \subseteq \mathbb{R}^d$ , la integral es simplemente

$$\int_{(a,b) \times \dots \times (u,v)} d^d x F(x) := \int_a^b dx^1 \dots \int_u^v dx^d F(x^1, \dots, x^d).$$

Podemos extender esto a dominios generales (es decir, no necesariamente en forma de caja)  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  mediante la introducción de una *función de indicación*  $\mu_G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in G \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Entonces definimos la integral

$$\int_G d^d x F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx^d \mu_G(x) F(x).$$

Ahora hay que preguntar si está definición varía bajo un cambio de variable (lo cual corresponderá a un cambio de carta en el concepto elevado).

---

<sup>1</sup>Estamos asumiendo que existe lo siguiente. Asumiremos que los resultados existen para toda la sección.

**Teorema 12.1.1.** Indiquemos con  $\phi : \text{preim}_\phi(G) \rightarrow G$  el cambio de mapa variable con  $G, \text{preim}_\phi(G) \subseteq \mathbb{R}^d$ . Entonces, si la integral de  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  se define como arriba, tenemos<sup>2</sup>

$$\int_G d^d x F(x) = \int_{\text{preim}_\phi(G)} d^d y |\det(\partial_a \phi^b)(y)| (F \circ \phi)(y),$$

donde  $|\det(\partial_a \phi^b)(y)|$  es el **Jacobiano** de  $\phi$ .<sup>3</sup>

Ejemplo 12.1.2. Consideremos  $d = 2$  y sea  $G = \mathbb{R}^2 \setminus (x, 0)$ , es decir  $\mathbb{R}^2$  con el eje- $x$  cortado. Sea entonces

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^+ \times [(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)] &\rightarrow G \\ (r, \varphi) &\mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \end{aligned}$$

Tenemos

$$(\partial_a \phi^b)(r, \varphi) := \begin{pmatrix} \partial_r(r \cos \varphi) & \partial_r(r \sin \varphi) \\ \partial_\varphi(r \cos \varphi) & \partial_\varphi(r \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

entonces  $|\det(\partial_a \phi^b)(r, \varphi)| = |r| = r$ . Esto da

$$\int_G dx^1 dx^2 F(x^1, x^2) = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi r F(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Decimos entonces que los elementos de volumen  $dx^1 dx^2$  y  $r dr d\varphi$  se corresponden entre sí en las respectivas coordenadas. Por supuesto, nos hemos referido a esas coordenadas porque es sencillo cambiar de coordenadas cartesianas a polares. .

## 12.2 Integración en una Carta

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  una variedad suave y sea  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ . Consideremos las cartas  $(U, x), (U, y) \in \mathcal{A}$  con el mismo dominio. Designemos  $f \circ x^{-1} =: f_{(x)} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$  y de forma similar para  $f_{(y)} : y(U) \rightarrow \mathbb{R}$ . Queremos definir la integral  $f$  en  $U$  a nivel de variedad como algo a lo largo de las líneas de

$$\int_U f := \int_{x(U)} d^d \alpha f_{(x)}(\alpha),$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  es la tupla coordenada en  $x(U)$ . Sin embargo, esto no es posible porque no es dependiente de la carta. Esto se ve fácilmente considerando el mapa de transición de cartas  $x \circ y^{-1} : y(U) \rightarrow x(U)$ :

$$\begin{aligned} \int_{x(U)} d^d \alpha f_{(x)}(\alpha) &= \int_{y(U)} d^d \beta |\det(\partial_a (x \circ y^{-1})^b)(\beta)| f_{(y)}(\beta) \\ &= \int_{y(U)} d^d \beta \left| \det \left( \frac{\partial x^b}{\partial y^a} \right)_{y^{-1}(\beta)} \right| f_{(y)}(\beta), \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Los índices  $a$  y  $b$  en el determinante no rompen la convención de sumación de Einstein. A lo que nos referimos aquí es al determinante de los elementos, y sabemos que el determinante es invariante respecto a la carta que usemos (téngase en cuenta que el determinante de una matriz es simplemente el producto de los valores propios (eigenvalues)).

<sup>3</sup>A veces el Jacobiano se define sin la parte de valor absoluto, pero aquí usaremos todo.

donde hemos usado  $f_{(x)} \circ x \circ y^{-1} = f_{(y)}$  y nuestra definición de  $\partial_a(x \circ y^{-1})^b$  en términos de la notación fraccionaria. En general este Jacobiano no será la unidad, y por eso no obtenemos  $\int_U f = \int_{y(U)} d^d \beta f_{(y)}(\beta)$ , tal como es requerido para la independencia de las cartas.

La solución obvia de este problema es intentar introducir algo en la parte derecha de la definición de  $\int_U f$  que cancele el factor Jacobiano que obtenemos. Una estructura así no puede ser definida simplemente en una variedad, así que necesitamos introducir una nueva estructura.

### 12.3 Formas Volumen

**Definición** (Forma Volumen). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  una variedad suave. Decimos que un campo tensorial- $(0, \dim \mathcal{M})$   $\Omega$  es denominado **forma volumen** si

- (i) se desvanece en cualquier parte;  $\Omega|_p \neq 0$  para todo  $p \in \mathcal{M}$ , y
- (ii) es completamente antisimétrico;  $\Omega(\dots, X, \dots, Y, \dots) = -\Omega(\dots, Y, \dots, X, \dots)$  para todas las entradas.

La cuestión obvia es preguntar si tenemos que proporcionar la forma volumen manualmente o puede ser obtenida "de algo que ya hayamos visto". La respuesta es, que la podemos obtener a partir de una métrica en una variedad métrica. Para llevar a cabo esta definición tenemos que introducir el símbolo de Levi-Civita.

**Definición** (Símbolo Levi-Civita). El **símbolo Levi-Civita** en  $d$  dimensiones es denominado  $\epsilon_{i_1 \dots i_d}$  y se define por las siguientes dos propiedades:

- (i)  $\epsilon_{123 \dots d} = 1$ , y
- (ii) antisimetría total, es decir que cambia el signo cuando dos índices cualesquiera son intercambiados

$$\epsilon_{i_1 \dots i_j \dots i_k \dots i_d} = -\epsilon_{i_1 \dots i_k \dots i_j \dots i_d}$$

*Observación 12.3.1.* Nótese que la condición (ii) para el símbolo Levi-Civita nos dice que si hay dos índices repetidos el símbolo se desvanece (desaparece). También nos dice que las permutaciones de los índices dejan el valor sin cambio. por ejemplo para  $d = 4$ ,  $\epsilon_{1123} = 0$  y  $\epsilon_{1234} = \epsilon_{2341}$ .

**Definición** (Atlas Orientado). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  una variedad. Entonces el subatlas  $\mathcal{A}^\uparrow \subseteq \mathcal{A}$  es denominado el **atlas orientado** (positivo) si

$$\det \left( \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \right) > 0,$$

para todas las cartas solapadas  $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}^\uparrow$ .

Se forma similar podemos definir que  $\mathcal{A}^\downarrow$  sea tal que el determinante sea negativo.

*Observación 12.3.2.* Es importante tener en cuenta que no siempre es posible definir un atlas orientado. Es decir, no es necesariamente verdadero que las cartas  $(U_i, x_i)$  que satisfacen la condición determinante cubran toda la  $\mathcal{M}$ , y por eso no forman un atlas. Este tipo de variedades son denominadas variedades *no-orientables*.

*Afirmación 12.3.3.* Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}^\dagger, g)$  una variedad métrica orientable. Podemos definir los componentes de la forma volumen en una carta  $(U, x) \in \mathcal{A}^\dagger$  de la siguiente manera

$$\Omega_{(x)i_1 \dots i_d} := \sqrt{\det(g_{(x)ij})} \epsilon_{i_1 \dots i_d}.$$

*Proof.* Está claro que las dos condiciones para la forma volumen se cumplen, ya que  $\det(g) \neq 0$  para la métrica Riemanniana/pseudo-Riemanniana (es decir, no hay 0s en la firma), y que el símbolo Levi-Civita es totalmente antisimétrico. Por eso lo único que tenemos que mostrar es que el resultado está bien definido, es decir tenemos que mostrar que los componentes se transforman como los de un campo tensor- $(0, d)$ . Tenemos <sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \Omega_{(x)i_1 \dots i_d} &= \sqrt{\det\left(g_{(y)mn} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \frac{\partial y^n}{\partial x^j}\right)} \epsilon_{i_1 \dots i_d} \\ &= \sqrt{\det(g_{(y)mn})} \left| \det\left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\right) \right| \epsilon_{i_1 \dots i_d} \\ &= \sqrt{\det(g_{(y)mn})} \operatorname{sgn}\left(\det\left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\right)\right) \det\left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\right) \epsilon_{i_1 \dots i_d}. \end{aligned}$$

Ahora usamos el resultado

$$\det\left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\right) \epsilon_{i_1 \dots i_d} = \left(\frac{\partial y^{m_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{m_d}}{\partial x^{i_d}}\right) \epsilon_{m_1 \dots m_d}.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \Omega_{(x)i_1 \dots i_d} &= \operatorname{sgn}\left(\det\left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\right)\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial y^{m_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{m_d}}{\partial x^{i_d}}\right) \sqrt{\det(g_{(y)mn})} \epsilon_{m_1 \dots m_d}\right] \\ &= \operatorname{sgn}\left(\det\left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\right)\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial y^{m_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{m_d}}{\partial x^{i_d}}\right) \Omega_{(y)m_1 \dots m_d}\right], \end{aligned}$$

la cual sería la propiedad de transformación correcta si no tuviéramos el término  $\operatorname{sgn}$  (función signo). Así pues, vemos que si restringimos el atlas de forma que  $\det\left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\right) > 0$ , como se indica en la afirmación, entonces simplemente obtenemos la propiedad de transformación deseada.  $\square$

*Observación 12.3.4.* La definición anterior de una forma volumen es una manera bastante tediosa de hacerlo, ya que tendríamos que chequear todos los mapas de transición de cartas y asegurar que la variedad es orientable, etc. Hay una manera mucho mejor de definir una forma volumen (usando el mapa retroceso ("*pull-back map*")), sin embargo para introducirlo aquí, tendríamos que introducir la idea de forma diferencial (que es donde la forma volumen deriva la primera parte (forma) de su nombre). El lector interesado es dirigido al apéndice C del libro de texto *Manifolds, Tensors and Forms* de Renteln.

<sup>4</sup>La notación de índices aquí puede ser un poco confusa, pero lo importante a tener en cuenta es cuando aparecen los determinantes, porque entonces los índices sólo nos indican las posiciones en las matrices y así aparentemente podemos romper la convención de sumación.



**Definición** (Densidad escalar). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}^\uparrow)$  una variedad suave orientada. Definimos la **densidad escalar** en la carta  $(U, x)$  como

$$\omega_{(x)} := \Omega_{i_1 \dots i_d} \epsilon^{i_1 \dots i_d},$$

donde  $\epsilon^{i_1 \dots i_d}$  se define igual que  $\epsilon_{i_1 \dots i_d}$ .

De los cálculos anteriores se deduce que las densidades escalares en las variedades métricas satisfacen<sup>5</sup>

$$\omega_{(y)} = \det \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) \omega_{(x)}.$$

## 12.4 Integración En el Dominio de Una Carta

**Definición** (Integración en el Dominio de Carta ("Integration on a Chart Domain")). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}^\uparrow)$  una variedad suave orientada y sea  $(U, x) \in \mathcal{A}^\uparrow$ . Definimos la integral de  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$  en el dominio  $U$  mediante

$$\int_U f := \int_{x(U)} d^d \alpha f_{(x)}(\alpha) \cdot \omega_{(x)}(x^{-1}(\alpha)),$$

donde  $\omega_{(x)}$  es la densidad escalar correspondiente a la forma volumen  $\Omega$ .

Afirmación 12.4.1. El concepto anterior de integración está bien definido.

*Proof.* Tenemos que mostrar que la fórmula no cambia cuando cambiamos de cartas. A partir de los cálculos hechos en esta sesión, tenemos

$$\begin{aligned} \int_U f &= \int_{y(U)} d^d \beta \left| \det \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) \right| f_{(y)}(\beta) \cdot \left[ \det \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) \right]^{-1} \omega_{(y)}(y^{-1}(\beta)) \\ &= \int_{y(U)} d^d \beta f_{(y)}(\beta) \cdot \omega_{(y)}(y^{-1}(\beta)), \end{aligned}$$

que es nuestra condición de definición buena. Nótese que hemos usado el hecho de que nuestro atlas está definido positivo para "remover" el signo de valor absoluto.  $\square$

Para los casos especiales de una variedad métrica orientada  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}^\uparrow, g)$  nuestro resultado se convierte en

$$\int_U f := \int_{x(U)} d^d \alpha \sqrt{\det (g_{(x)ij})} (x^{-1}(\alpha)) f_{(x)}(\alpha).$$

Notación. Para aligerar la notación, es común indicar

$$g := \det (g_{(x)ij}) (x^{-1}(\alpha)),$$

cambiando la expresión anterior en

$$\int_U f := \int_{x(U)} d^d \alpha \sqrt{g} f_{(x)}(\alpha).$$

<sup>5</sup>Quitamos los índices en el determinante para simplificar la notación, pero son simplemente los índices usados para  $x$  e  $y$ .

*Observación 12.4.2.* En todo lo anterior hemos asumido que estamos usando una variedad de Riemann, en cuyo caso  $g > 0$ . La fórmula anterior se adapta a variedades pseudo-Riemannianas con  $g < 0$  simplemente reemplazando  $\sqrt{g} \rightarrow \sqrt{-g}$ . Veremos esto más adelante cuando, por ejemplo, consideremos la acción de Maxwell.

## 12.5 Integración En la Variedad Completa

En este punto podríamos estar tentados en decir que la integración en la variedad completa es simplemente la suma de las integrales en los dominios de las cartas. Es decir sea  $\{(U_i, x_i)\} \subseteq \mathcal{A}^\uparrow$  un subatlas (es decir  $\cup_i U_i = \mathcal{M}$ ) entonces podríamos tener la tentación de decir

$$\int_{\mathcal{M}} f = \sum_i \left( \int_{x_i(U_i)} d^d \alpha \sqrt{g} f(x_i)(\alpha) \right).$$

Sin embargo, esto adolece del problema común de sobre conteo. Es decir, tal como está definido, las contribuciones de las regiones solapadas  $U_i \cap U_j$  son contadas en *ambas* la integral  $x_i(U_i)$  y la integral  $(U_j, x_j)$ . Por lo tanto, necesitamos una vía para eliminar este exceso de conteo. Este problema se resuelve requiriendo que la variedad admita la llamada *partición de unidad*.

Grosso modo, para cualquier subatlas finito <sup>6</sup>  $\mathcal{A}' = \{(U_1, x_1), \dots, (U_N, x_N)\} \subseteq \mathcal{A}^\uparrow$  existen funciones continuas  $\rho_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que para todo  $p \in \mathcal{M}$

$$\sum_i \rho_i(p) = 1,$$

donde la suma es realizada de manera que  $p \in U_i$ .<sup>7</sup> Esto da cuenta del exceso de conteo y nos permite definir la integral sobre la variedad completa como

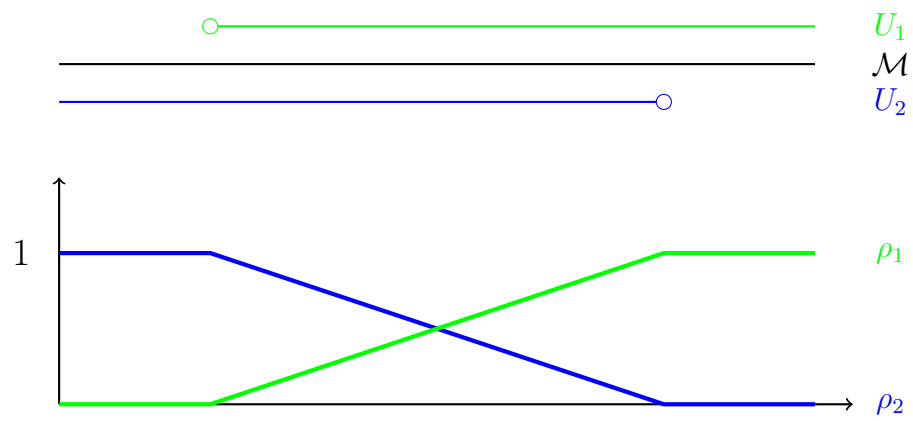
$$\int_{\mathcal{M}} f := \sum_i \left( \int_{U_i} \rho_i \cdot f \right).$$

Es decir, las  $\rho_i$ s se definen de forma que su suma sea igual a la unidad en cualquier punto de  $\mathcal{M}$ . Claramente esto elimina el sobre conteo y es justo una contribución para la región de solape.

*Ejemplo 12.5.1.* Sea  $\dim \mathcal{M} = 1$  que esté cubierta por dos cartas  $(U_1, x_1)$  y  $(U_2, x_2)$ . Definimos las  $\rho_i$ s de tal manera que cambien linealmente a lo largo de la región de solape. Tenemos entonces algo como el diagrama de abajo.

<sup>6</sup>Nótese que requerimos que sea finito, porque de lo contrario necesitaríamos hacer la prueba de convergencia para así poder sacar la suma de la integral siguiente.

<sup>7</sup>Alternativamente podríamos decir  $\rho_i(p) = 0$  si  $p \notin U_i$  y dejar que la suma se haga desde  $i = 1$  hasta  $i = N$ .



## 13 | Espaciotiempo Relativístico

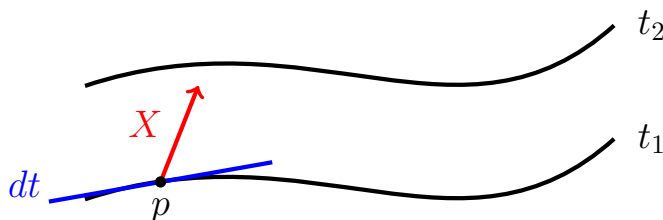
Comenzamos ahora a hablar de física. Usaremos, por supuesto, todas las herramientas matemáticas desarrolladas hasta ahora y por tanto es importante que el lector comprenda totalmente el contenido hasta este punto.

Recordemos la definición de espacio Newtoniano, dada en la sesión 9, como la quintupla  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla, t)$  donde  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  es una variedad suave 4-dimensional,  $\nabla$  es una conexión libre de torsión y  $t \in C^\infty(\mathcal{M})$  un tiempo absoluto que cumple  $dt|_p \neq 0$  para todo  $p \in \mathcal{M}$  y  $\nabla dt = 0$ .

Recordemos también la definición dada al comienzo del curso. Tenemos una variedad topológica 4-dimensional con un atlas suave,  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ , que lleva una conexión libre de torsión,  $\nabla$ , pero ahora requerimos también que la conexión sea compatible con una métrica Lorentziana,  $g$ , y la llamada *orientación temporal*,  $T$ . Así pues, necesitamos la séxtupla  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla, g, T)$ .

### 13.1 Orientación Temporal

La función de tiempo absoluto en el espaciotiempo Newtoniano asocia un tiempo a cada  $p \in \mathcal{M}$ . Es decir, dado cualquier punto podemos dar la hora de ese punto indiscutiblemente. Usamos la función de tiempo absoluto para definir un campo vectorial dirigido al futuro  $X$  como  $dt : X > 0$ . Gráficamente es representado por una flecha apuntando hacia la 'parte superior' de un plano tangente a una superficie constante  $t$ .



No tenemos una función de tiempo absoluto para nuestro espaciotiempo relativista, y por eso necesitamos otra manera de definir lo que es un campo vectorial dirigido al futuro. Sabemos por los tutoriales que una estructura de métrica Lorentziana proporciona una estructura de doble cono en el espacio tangente a cada punto. La pregunta es, "podemos usar esta estructura de cono de manera similar a como usamos las superficies  $dt$  en la física de Newton para definir los campos vectoriales dirigidos al futuro/pasado/espacio? La respuesta es "sí, pero no por sí sola".

**Definición** (Orientación temporal). Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}^\uparrow, g)$  una variedad Lorentziana orientada. Entonces una **orientación temporal** por un campo vectorial suave  $T$  que

(i) no desvanece en ninguna parte, y

(ii)  $g(T, T) > 0$ .<sup>1</sup>

**Proposición 13.1.1.** *La combinación de la métrica y la orientación temporal es la que nos permite definir los campos vectoriales dirigidos al futuro/pasado/espacio en el espaciotiempo relativista.*

La "demostración" de la proposición de arriba se deduce simplemente rompiendo la definición. La estructura métrica nos da una estructura de doble cono en el plano tangente a cada  $p \in \mathcal{M}$ . Queremos identificar uno de esos conos como el futuro y el otro como el pasado. Sabemos que un vector  $X$  que satisface  $g(X, X)|_p > 0$  cae entonces en *uno de los dos* conos tangentes a  $p$ . Sin embargo, no nos dice en cuál de los conos cae, y por lo tanto no sabemos si es dirigido al futuro o dirigido al pasado. Necesitamos, por lo tanto, algún método de seleccionar qué cono es. Esto es precisamente lo que hace la orientación temporal. La condición (i) nos dice que está definido en cualquier parte, y por eso podemos definir el cono del futuro en cada punto, y la condición (ii) nos dice que  $T$  cae dentro del cono (una necesidad obvia). Entonces simplemente decimos 'cualquier cono  $T$  que cae ahí, es el cono del futuro'. La última, pero muy importante, propiedad es que  $T$  es un campo vectorial *suave*. Esto significa que los conos del futuro en puntos separados están conectados suavemente. Es decir, el cono seleccionado no se voltea de repente al movernos de un punto a otro.

Observación 13.1.2. Para la imagen del espaciotiempo Newtoniano, siempre podemos encontrar un -así llamado- *atlas estratificado*, en el cual todos los planos  $dt$  se encuentran horizontalmente en las cartas. Sin embargo, esto no es cierto par la representación relativista; es decir, en general no podemos definir un atlas de manera que todos los conos estén hacia arriba. Físicamente esto no es un problema porque, por supuesto, da lo mismo cómo aparezcan en una carta, son las cosas físicas lo que importan. Sin embargo, esto puede dificultar los cálculos, por lo que no merece la pena.

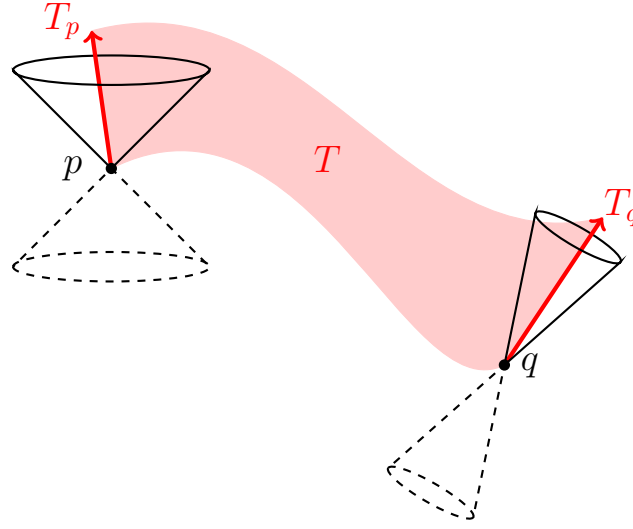
Notación. No nos limitaremos a referirnos al espaciotiempo relativista sólo como espaciotiempo.

Nótese que para el espaciotiempo Newtoniano un vector dirigido al futuro sólo tenía que apuntar "por encima" de la superficie tangente  $dt$  y no había restricciones en inclinación (es decir, el ángulo entre el vector y el plano  $dt$ ). Recordemos que definimos las partículas para desplazarse a lo largo de las líneas del mundo dirigidas al futuro. Intuitivamente, esto corresponde a la idea de que no hay límite para la velocidad <sup>2</sup> de una partícula, siempre que aún esté dirigida al futuro. Obviamente, esto está en contraste con la idea de la relatividad especial de que no existe un objeto con masa que pueda viajar a la velocidad de la luz (o mayor).

En la foto del espaciotiempo, sin embargo, requerimos que los vectores dirigidos al futuro ("*future directed*") caigan *dentro* del cono. Están entonces limitados por la superficie del cono

<sup>1</sup>En nuestra firma que es  $(+, -, -, -)$ . Para la firma  $(-, +, +, +)$  la condición sería  $g(T, T) < 0$ .

<sup>2</sup>Téngase en cuenta que no tenemos una métrica y por tanto en realidad no podemos definir aquí una velocidad.



**Figura 13.1:** Representación pictórica del espacio tiempo relativista. La métrica  $g$  produce una estructura de doble cono en el plano tangente a cada punto en la variedad. Con objeto de diferenciar los dos conos, se introduce un campo vectorial suave  $T \in \Gamma TM$  de tal manera que, en cada punto  $p \in M$ , el vector  $T_p \in T$  apunta dentro de uno de los dos conos asociado a ese punto. Este cono es entonces identificado como el 'cono del futuro' asociado a ese punto. la suavidad de  $T$  (indicada por la región sombreada) asegura una transición suave desde el 'futuro' de un cono al otro. Los conos de línea sólida indican los conos del 'futuro' y las líneas de trazos los conos del 'pasado'.

(la cual corresponde, como ya definiremos, a los -así llamados- vectores *nulos*). Si entonces identificamos la superficie de este cono con la líneas del mundo de la luz, esto correspondería exactamente a la condición de que las partícula masivas están limitadas por la velocidad de la luz. <sup>3</sup>

Vamos a verlo más preciso.

**Postulado 1.** La línea del mundo  $\gamma$  de una partícula masiva cumple

- (i)  $g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) > 0$ , y
- (ii)  $g_{\gamma(\lambda)}(T, v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) > 0$ .

**Postulado 2.** la línea del mundo  $\gamma$  de una partícula sin masa cumple

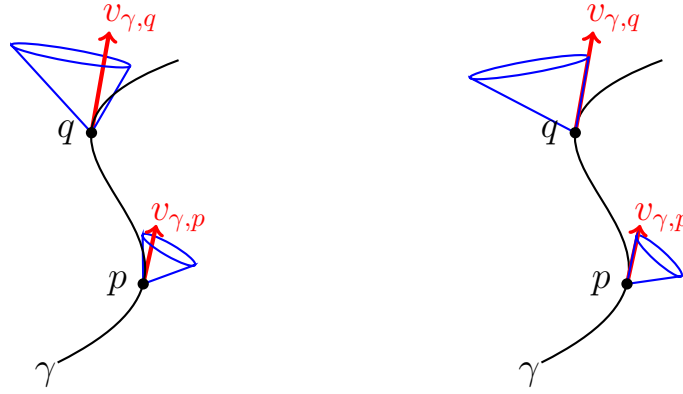
- (i)  $g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) = 0$ , y
- (ii)  $g_{\gamma(\lambda)}(T, v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) > 0$ .

El postulado 1 nos dice que (i) la línea del mundo de una partícula masiva cae dentro de la estructura del cono, y (ii) que está dirigida al futuro. La única diferencia con el postulado

<sup>3</sup>Una vez más debemos tener cuidado al hablar aquí de velocidad porque en relatividad la velocidad es relativa. Lo que simplemente queremos decir es que no existe marco de referencia en el que la velocidad de una partícula masiva exceda la velocidad de la luz.

2 es que la línea del mundo de una partícula sin masa cae en la superficie del cono futuro. Es en este punto donde podemos identificar la superficie del cono como la trayectoria de la luz, ya que la luz es una partícula sin masa.

*Observación 13.1.3.* La redacción de arriba es poco rigurosa. La trayectoria de la luz es la línea del mundo, que está definida en la variedad. Las superficies de los conos de luz viven en los espacios tangentes. Por tanto, no tiene sentido identificar los dos. Lo que queremos decir con identificar es que los vectores velocidad a la línea del mundo de la luz se encuentran en el cono, lo cual es lo que dice exactamente la condición (i).



**Figura 13.2:** Líneas del mundo de una partícula masiva (izquierda) y de una partícula sin masa (derecha). Es importante recordar que los conos y los vectores velocidad viven en el espacio tangente al punto, no en la propia variedad, lo que la imagen de arriba podría conducir a creer.

*Observación 13.1.4.* Nótese que en la mecánica Newtoniana no podemos hablar de partículas sin masa y por lo tanto no podemos definir algo similar al postulado 2.

*Observación 13.1.5.* Hay que señalar que habíamos requerido que la orientación temporal fuese un campo vectorial suave no-evanescente ("non-vanishing"). Ya hemos visto variedades topológicas que no soportan ese tipo de cosas, a saber, la esfera. Estamos a salvo aquí por el hecho de que podemos no definir una métrica Lorentziana en la esfera, por lo que no podemos ni siquiera empezar a intentar y definir una orientación temporal.

*Ejemplo 13.1.6.* Consideremos el ejemplo de espaciotiempo dado por  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$ ,  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{st}$  y donde el atlas contiene la carta  $(\mathbb{R}^4, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^4})$ . Sea la métrica en esa carta la dada por  $g_{(x)ij} = \eta_{ij}$  y la orientación temporal por  $T_{(x)} = (1, 0, 0, 0)$ . A partir de los componentes de la métrica obtenemos símbolos de Christoffel evanescentes en cualquier parte  $\Gamma^k_{ij} = 0$ , y desde los cuales, usando la conexión Levi-Civita, se deduce que la curvatura de Riemann desaparece. Este espaciotiempo es, por tanto, *plano*. Es este el espaciotiempo de la relatividad especial, y es conocido como **espaciotiempo Minkowski** (o simplemente espacio Minkowski). En la carta dada, todas las representaciones de los conos de luz están de pie derechos, es decir, hacen un ángulo de 45 grados con el plano horizontal.

### 13.2 Observadores

**Definición** (Observador). Un **observador** en un espaciotiempo 4-dimensional  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}^\dagger, g, T)$  es una línea del mundo  $\gamma$  de una partícula masiva junto con una elección de base  $\{e_0(\lambda), \dots, e_3(\lambda)\}$  en cada  $T_{\gamma(\lambda)}\mathcal{M}$ , with

$$(i) \quad g(e_a, e_b) = \eta_{ab}, \text{ y}$$

$$(ii) \quad e_0(\lambda) = v_{\gamma, \gamma(\lambda)},$$

donde<sup>4</sup>

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1, \quad \text{y} \quad \eta_{ab} = 0 \quad \forall a \neq b.$$

*Notación.* Denominaremos a los observadores como  $(\gamma, e)$  donde  $e$  representa la selección de la base completa.

La condición (i) es la de que la base sea ortogonal (en el sentido Lorentziano) en cada espacio tangente. Aclararemos enseguida el significado de la condición (ii), pero la idea es que el observador no se mueva en el espacio con respecto a sí mismo.

Hay una definición alternativa, más precisa, de un observador, que es la que damos abajo.

**Definición** (Observador (Paquete/Haz de un Marco)(*Frame Bundle*)). Un **observador** es una sección suave en el *paquete de marcos*  $\mathcal{LM}$  sobre  $\mathcal{M}$ .

No tenemos que entrar en mucho detalle aquí sobre lo que es un paquete (o haz) de marcos, pero la idea básica es que las fibras (del haz) son el espacio de las bases. Es decir, un elemento en la fibra es la cuádrupla de elementos correspondiendo a una base por el punto  $p \in \mathcal{M}$ . Tomamos una sección, con lo que tenemos una base en cada punto a lo largo de la línea del mundo y finalmente requerimos que la sección sea suave, para que las bases hagan una transición suave de una a otra a medida que nos movemos a lo largo de  $\gamma$ ; es que no queremos que la izquierda se caiga de repente.

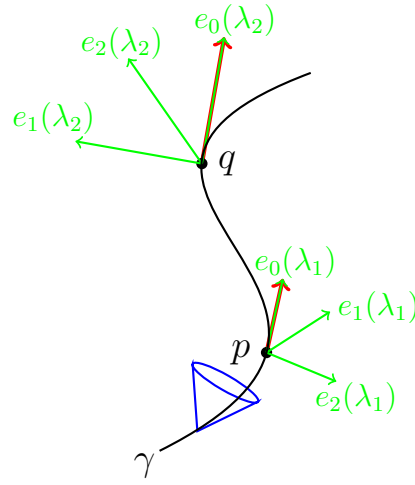
**Postulado 3.** Un **reloj** llevado por un observador específico  $(\gamma, e)$  medirá un **tiempo**  $\tau$ , conocido como el tiempo propio/eigen-tiempo ("proper time/ eigen-time"), entre dos eventos  $\gamma(\lambda_1)$  y  $\gamma(\lambda_2)$  como

$$\tau := \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{g(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)})}.$$

La combinación de esta condición (ii) en la definición de un observador, es la que nos dice sólo siguen el tiempo *a medida que lo conocen*. Como sugiere la cursiva, este tiempo está definido con relación a ellos. Lo que estamos resaltando aquí es el hecho de que el tiempo es un concepto derivado de nuestro espaciotiempo. Por supuesto, un observador diferente podría no estar de acuerdo con el tiempo y no habría manera de determinar cuál es el correcto de una manera absoluta, a diferencia de en el espaciotiempo Newtoniano, donde la función del tiempo absoluto nos daría la respuesta. La idea es esta, que el tiempo es relativo y la simultaneidad está mal definida.

<sup>4</sup>Como es normal, esto es sólo en nuestra firma. Si hemos usado  $(-, +, +, +)$  la definición de  $\eta_{ab}$  cambia en consecuencia.



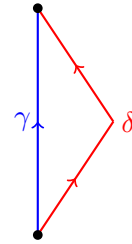


**Figura 13.3:** representación gráfica de un observador,  $(\gamma, e)$ . La curva  $\gamma$  es la de una partícula masiva, y por cada punto  $p \in \gamma$ , el observador tiene una base para  $T_p\mathcal{M}$ , tal que  $e_0$  es la velocidad en ese punto. Las bases en los diferentes puntos están relacionadas por la curva suave en el haz de marcos – donde la suavidad asegura una transición continua desde uno en  $p$  hasta uno en  $q$ .

Observación 13.2.1. Señalemos también que esto sólo tiene sentido para un observador que mida tiempos entre eventos por los que ha pasado. Este es un punto sutil pero que en realidad tiene un impacto de gran alcance, por ejemplo cuando se trata de hablar de temas como superficies de desplazamiento al rojo infinito de agujeros negros.

Ejemplo 13.2.2. Consideremos dos observadores en el espaciotiempo Minkowski. Tengamos estos observadores parametrizados en la carta  $(\mathbb{R}^4, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^4})$  como

$$\begin{aligned}\gamma_{(x)}(\lambda) &= (\lambda, 0, 0, 0) \\ \delta_{(x)}(\lambda) &= \begin{cases} (\lambda, \alpha\lambda, 0, 0) & \lambda \leq \frac{1}{2} \\ (\lambda, (1-\lambda)\alpha, 0, 0) & \lambda > \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$



para  $\lambda \in (0, 1)$  y  $\alpha$  una constante entre 0 y 1. Calculamos

$$\tau_\gamma = \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{(x)ij} \dot{\gamma}_{(x)}^i \dot{\gamma}_{(x)}^j} = \int_0^1 d\lambda \sqrt{1} = 1,$$

y

$$\tau_\delta = \int_0^{\frac{1}{2}} d\lambda \sqrt{1 - \alpha^2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 d\lambda \sqrt{1 - (-\alpha)^2} = \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

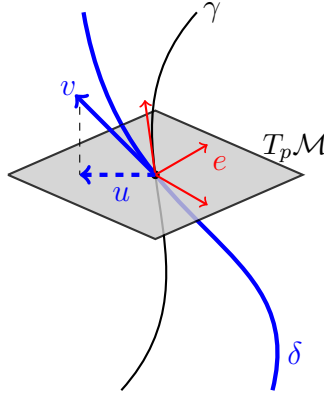
Por tanto, el observador  $\delta$  mide un tiempo más corto. Esta es la paradoja de los gemelos y la dilatación del tiempo, donde  $\alpha \rightarrow 1$  corresponde a  $v \rightarrow c$ .

**Postulado 4.** Sea  $(\gamma, e)$  un observador y  $\delta$  la línea del mundo de una partícula masiva, que está parametrizada de manera que  $g(v_{\delta, \delta(\lambda)}, v_{\delta, \delta(\lambda)}) = 1$  a todo lo largo de  $\delta$ .<sup>5</sup> Supongamos que el observador y la partícula se encuentran en un  $p \in \mathcal{M}$ , es decir,  $\gamma(\tau_1) = p = \delta(\tau_2)$ . Este observador mide la 3-velocidad (o velocidad espacial) de esta partícula como

$$u_{\delta(\tau_2)} := (\epsilon^\alpha : v_{\delta, \delta(\tau_2)})e_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

donde  $\epsilon^\alpha$  es el  $\alpha^{\text{ésimo}}$  componente de la llamada base dual<sup>6</sup> de  $e$ .

En el postulado anterior vemos claramente la dependencia de la base y por eso sabemos que un observador diferente, que también encuentre  $\delta$  en  $p \in \mathcal{M}$ , podría obtener una medida diferente para la 3-velocidad de la partícula masiva. Esta es exactamente la idea de que la 3-velocidad es un concepto relativo. Nótese que la 4-velocidad  $v_{\delta, \delta(\tau_2)}$  es objetiva; únicamente es la 3-velocidad (que la podemos imaginar como una 'proyección' de la 4-velocidad en el plano espacial del observador) la que está mal definida.



### 13.3 Rol de las Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz surgen como sigue: sean  $(\gamma, e)$  y  $(\tilde{\gamma}, \tilde{e})$  observadores con  $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ . Luego,  $\{e_0, \dots, e_3\}$  y  $\{\tilde{e}_0, \dots, \tilde{e}_3\}$  son ambas bases para el espacio tangente  $T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$ . Podemos entonces expresar la última base en función de la primera. Es decir,

$$\tilde{e}_a = \Lambda^b_a e_b,$$

donde  $\Lambda \in GL(4)$ .<sup>7</sup> De la definición de un observador tenemos

$$\begin{aligned} \eta_{ab} &= g(\tilde{e}_a, \tilde{e}_b) \\ &= g(\Lambda^m_a e_m, \Lambda^n_b e_n) \\ &= \Lambda^m_a \Lambda^n_b g(e_m, e_n) \\ \therefore \eta_{ab} &= \Lambda^m_a \Lambda^n_b \eta_{mn}, \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Esto corresponde a normalizar la línea del mundo para seguir al reloj que lleva el observador. Elegimos esto porque hace más fáciles las definiciones siguientes.

<sup>6</sup>Para más detalles véanse las sesiones del curso "Lectures on the Geometrical Anatomy of Theoretical Physics" del Dr. Schuller.

<sup>7</sup>Para el lector no familiarizado, este es el inevitable grupo de matrices de 4x4, conocido como el grupo lineal general. Para más detalles, véase cualquier curso de teoría de grupos.

que nos dice que las  $\Lambda$ s son elementos de las transformaciones de Lorentz ,  $\Lambda \in O(1, 3)$ .

Vemos, por tanto, que las transformaciones de Lorentz relacionan los *marcos* de dos observadores en el punto de encuentro. No tiene ningún significado decir que 'usamos una transformación de Lorentz para relacionar un marco de un observador en  $p \in \mathcal{M}$  con otro observador en  $q \neq p \in \mathcal{M}$ '. Las transformaciones de Lorentz, como tales, actúan en un único espacio tangente a la variedad, y *no*, de ninguna manera, actúan en el espaciotiempo. Que escribir cosas como

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

es un completo sinsentido. Es cierto que, en relatividad especial, en la que el espaciotiempo es plano, podemos extender el espacio tangente a toda la variedad, y entonces podríamos decir 'ah, bien, entonces actúa en todos los planos tangentes y, por ende, podemos pensar que actúa en todo el espaciotiempo.' Esto nos trae de vuelta a Observación 5.5.1, donde dijimos que al hacerlo de ese modo nos limitamos a nosotros mismos, primero a las transformaciones lineales entre marcos (de referencia) y a continuación al caso específico de las transformaciones de Lorentz. Esto, físicamente, no es una buena idea, porque el mundo objetivo no tiene en cuenta los marcos que usamos y por lo tanto deberíamos ser capaces de transformar a cualquier marco y estudiar física.

## 14 | Materia

Hay dos tipos de materia (teórica)<sup>1</sup>: materia puntual y materia de campo. Ejemplos de cada una son: una partícula masiva puntual y el campo electromagnético, respectivamente. Como ya veremos, la materia de campo es la que genera la curvatura del espaciotiempo, y por consiguiente, desde el punto de vista de la relatividad general, el tipo más fundamental de materia es la materia de campo.

### 14.1 Materia Puntual

Los Postulado 1 y Postulado 2 ya restringen las posibles líneas del mundo para partículas masivas y sin masa. Sin embargo, no nos dicen cuál es su ley de movimiento precisa, posiblemente en presencia de fuerzas.

#### 14.1.1 Sin Fuerzas Externas

Sabemos que las ecuaciones de movimiento para un sistema pueden ser obtenidas variando una acción adecuada y obteniendo las ecuaciones de Euler-Lagrange. A continuación se encuentran las acciones para partículas masivas y sin masa, sin embargo más adelante veremos que en realidad podemos llegar a ellas como consecuencia de las ecuaciones de campo de Einstein.

$$S_{\text{massive}}[\gamma] := m \int d\lambda \sqrt{g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)})},$$
$$S_{\text{massless}}[\gamma, \mu] := \int d\lambda \mu g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)}),$$

donde  $\mu$  es un multiplicador de Lagrange, que es introducido para que cuando variamos con respecto a él obtengamos  $g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) = 0$ , que es la condición (i) en el Postulado 2. Por supuesto también introducimos en nuestras acciones la condición  $g_{\gamma(\lambda)}(T, v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) > 0$ .

Es legítimo preguntar "por qué estamos empezando con acciones en lugar de simplemente empezar con las ecuaciones de Euler-Lagrange?" La respuesta es simplemente por el hecho de que podemos añadir varias acciones juntas fácilmente y obtener a continuación las ecuaciones de movimiento para el sistema compuesto. Es decir, los sistemas compuestos tienen una acción que es la suma de las acciones constitutivas, incluyendo posiblemente términos de interacción, y entonces variamos esta acción compuesta para obtener las ecuaciones de movimiento.

---

<sup>1</sup>Esto no es más que una distinción académica, ya que a menudo es útil pensar en estas dos clases separadas y tratarlas respectivamente. En el mundo real, por supuesto, sólo tenemos materia.

### 14.1.2 Presencia de Fuerzas Externas

A grandes rasgos, en relatividad especial, la reacción de una partícula a una fuerza no es instantánea, sino que tiene un cierto tiempo de retardo. Este tiempo de retardo se explica por el hecho de que las fuerzas están mediatizadas por campos y si la partícula tiene que reaccionar al campo tiene que estar *acoplada*. Por eso lo que realmente queremos decir por "presencia de fuerzas externas" es "presencia de campos a los cuales se acopla la partícula".

El ejemplo más claro de acción de una partícula acoplada a un campo externo es el de una partícula masiva cargada acoplándose al campo electromagnético,

$$S[g; A] := \int d\lambda \left[ m \sqrt{g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)})} + q(A : v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) \right],$$

donde  $A \in \Gamma T\mathcal{M}$  es el potencial electromagnético en  $\mathcal{M}$  y  $q \in \mathbb{R}$  es la carga de la partícula.

*Notación.* Hemos usado el punto y coma en los argumentos de la acción para indicar que tratamos  $A$  como una cantidad fija, y por eso no hay variación con respecto a ella.

#### Ejercicio

Sea  $L_{\text{int}} := q(A : v_{\gamma, \gamma(\lambda)})$ . Usamos una carta  $(U, x)$  para indicar que las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción de arriba son

$$m(\nabla_{v_\gamma} v_\gamma)^a = -q F^a_b \dot{\gamma}^b,$$

donde  $F^a_b := g^{ac}(A_{c,b} - A_{b,c})$ .

*Pista: si estás estancado, puedes seguirlo en los vídeos.*

El resultado del ejercicio anterior es la *ley de la fuerza de Lorentz* en una partícula cargada en el campo electromagnético. Nótese también que la acción dada arriba es reparametrización ( $\lambda \rightarrow \lambda'(\lambda)$ ) invariante, como debe ser si tiene que ser la acción de la ley de fuerza de Lorentz.

## 14.2 Materia de Campo

**Definición** (Materia de Campo Clásica). **Materia de campo Clásica**<sup>2</sup> es cualquier tensor en el espaciotiempo cuyas ecuaciones de movimiento derivan de una acción.

Esta definición es por supuesto muy poco útil, pero la utilizamos porque es difícil dar otra definición que no exagere o subestime lo que es la materia de campo. Nosotros vemos más bien lo que es la materia de campo considerando la acción de Maxwell.<sup>3</sup>

$$S_{\text{Maxwell}}[A; g] := \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} dx^4 \sqrt{-g} F_{ab} F_{cd} g^{ac} g^{bd},$$

donde, por el momento, hemos asumido que la métrica es fija.

<sup>2</sup>Como en no-quantum.

<sup>3</sup>En la definición de abajo hemos asumido que hay una carta que cubre la totalidad del espaciotiempo. Si este no es el caso, la definición se mantiene, pero sólo tenemos que usar las ideas discutidas al final de la clase 12.

*Observación 14.2.1.* Nótese que usamos  $\sqrt{-g}$ , no solo  $\sqrt{g}$ . Esto es porque estamos tratando con una métrica Lorentziana que tiene determinante negativo.

*Ejemplo 14.2.2.* Si tomamos nuestro espaciotiempo como el espaciotiempo de Minkowski y usamos el mapa  $(\mathbb{R}^4, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^4})$ , tenemos  $g = -1$ ,  $g^{ab} = \eta^{ab}$  y así la acción de Maxwell se convierte en

$$S_{\text{Maxwell}}^{\text{Mink}}[A; g] = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} dx^4 F_{ab} F^{ab},$$

que nos puede resultar familiar. Nótese, no obstante, que sólo toma esta forma *en esta carta*. Si elegimos coordenadas polares, no tendremos  $g = -1$  ni  $g^{ab} = \eta^{ab}$ .

Las ecuaciones de Euler para una acción de campo (en una carta) están dadas por

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_m} - \frac{\partial}{\partial x^s} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_s A_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x^t} \frac{\partial}{\partial x^s} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \partial_t \partial_s A_m} \right) - \dots,$$

donde la tendencia sigue con signo alternativo. El cálculo de las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción de Maxwell da las ecuaciones de Maxwell no homogéneas

$$(\nabla_a F)^{ab} = 0.$$

Si hubiéramos considerado la acción incluyendo un acoplamiento a una corriente  $j \in \Gamma T\mathcal{M}$ ,

$$S[A; g, j] = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} dx^4 \sqrt{-g} (F_{ab} F_{cd} g^{ac} g^{bd} + A : j),$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange se convertirían en

$$(\nabla_a F)^{ab} = j^b.$$

Las dos ecuaciones de Maxwell restantes pueden obtenerse mediante

$$(\nabla_{[a} F)_{bc]} = 0.$$

*Observación 14.2.3.* Hay una manera más elegante (en mi opinión) de escribir las ecuaciones de Maxwell, pero incluye introducir correctamente la derivada exterior,  $d$ , y el asterisco Hodge (*Hodge star*),  $\star$ . las fórmulas son

$$dF = 0 \quad \text{y} \quad d \star F = \star j,$$

donde  $F = dA$  es el tensor de Faraday y  $J$  es la densidad de corriente. El lector interesado puede dirigirse al Ejemplo 3.14 y al Ejercicio 3.28 del libro de texto de Renteln *Manifolds, Tensors, and Forms* (o muchos otros libros de texto que lo tratan).

Hay otros ejemplos bien apreciados (en libros de texto), incluyendo la acción *Klein-Gordon*

$$S_{\text{KG}}[\phi] := \int_{\mathcal{M}} d\phi \sqrt{-g} [g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - m^2 \phi^2],$$

donde  $\phi \in C^\infty(\mathcal{M})$ , es un campo escalar en el espaciotiempo.

### 14.3 Tensor Energía-Momento De Los Campos de Materia

Hemos supuesto siempre hasta ahora que nos ha sido dada la métrica Lorentziana para nuestro espaciotiempo. La pregunta obvia es "qué métrica?" Si vamos a describir un sistema físico, p.ej. el universo, obviamente queremos una métrica que nos dé precisamente estos resultados físicos. Por lo tanto, queremos obtener alguna acción para el tensor métrico mismo, que denominaremos  $S_{\text{grav}}[g]$ . Esta acción será añadida a cualquier acción de materia  $S_{\text{materia}}[\dots]$ , con objeto de describir el sistema total.

Ejemplo 14.3.1. Si tomamos la acción de Maxwell tenemos

$$S_{\text{total}}[g, A] = S_{\text{grav}}[g] + S_{\text{Maxwell}}[A, g],$$

donde la métrica ya no es tomada como fija en la acción de Maxwell, es decir, usamos una coma, no un punto y coma.

Por supuesto, si variamos la acción total con respecto al argumento de la acción de materia ( $A$  en el ejemplo anterior) sólo nos dará las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Maxwell en el ejemplo). Sin embargo, variando ahora con respecto a  $g$  nos dará una contribución desde ambos  $S_{\text{grav}}$  y  $S_{\text{materia}}$ ,

$$G_{ab} = 8\pi G_N T_{ab},$$

donde  $G_{ab}$  es la contribución de  $S_{\text{grav}}$ ,  $T_{ab}$  es la contribución de  $S_{\text{materia}}$ , y donde hemos incluido el factor  $8\pi G_N$ , donde  $G_N$  es la constante de Newton, por convención. Esta es la llamada **ecuación de Einstein**.

Una vez hemos fijado  $S_{\text{grav}}$  obtendremos por supuesto siempre la misma  $G_{ab}$ , pero el  $T_{ab}$  depende de la acción de la materia que estemos utilizando. Podemos asegurar que nuestras ecuaciones del movimiento siempre satisfacen la ecuación de Einstein introduciendo la siguiente definición.

**Definición** (Tensor Energía-Momento). Sea  $S_{\text{materia}}[\dots, g]$  cualquier acción de materia que se acopla a la métrica. Definimos a continuación los componentes del **tensor energía-momento** mediante

$$T^{ab} := \frac{-2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{materia}}}{\partial g_{ab}} - \frac{\partial}{\partial x^s} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{materia}}}{\partial \partial_s g_{ab}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^t} \frac{\partial}{\partial x^s} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{materia}}}{\partial \partial_t \partial_s g_{ab}} \right) - \dots \right],$$

donde los términos continúan alternando el signo.

Observación 14.3.2. En la definición anterior decíamos "que se acopla a la métrica". Esto es verdad para todos los campos de materia clásicos del modelo estándar, y así lo mantendremos siempre en este curso.

Observación 14.3.3. El signo menos en la definición anterior se incluye para garantizar  $T(\epsilon^0, \epsilon^0) > 0$ , lo que nos dice que la energía es positiva.

Ejemplo 14.3.4. para la acción de Maxwell, el tensor energía-momento es

$$T_{ab} = F_{am} F_{bn} g^{mn} - \frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} g_{ab}.$$

## 15 | Gravedad de Einstein

*Observación 15.0.1.* En esta sesión (y en las siguientes) vamos a usar muchos índices. Obviamente esto implica que estamos usando cartas y de ahí que los resultados podrían resultar al final un sinsentido. Esta observación afirma que los resultados, salvo especificado en contrario, son por supuesto dependientes de la carta, y simplemente usamos índices para dejar claro desde el punto de vista notacional, lo que estamos haciendo.

Recordemos que en la sesión ("lecture"), pudimos reformular la ecuación de Poisson,  $\nabla^2\phi = 4\pi G_N\rho$ , en términos de la curvatura del *espaciotiempo Newtoniano*, a saber, como  $\text{Ric}_{00} = 4\pi G_N\rho$ . Esto llevó a Einstein a postular las ecuaciones de campo relativísticas para la métrica Lorentziana  $g$  del espaciotiempo<sup>1</sup> como

$$\text{Ric}_{ab} = 8\pi G_N T_{ab}.$$

Sin embargo, esta ecuación adolece de un problema: puede mostrarse<sup>2</sup> que  $(\nabla_a T)^{ab} = 0$ . Esto implicaría que  $(\nabla_a \text{Ric})^{ab} = 0$ , lo que en general *no* es cierto. Einstein trató de argumentar este problema, pero resulta que estas ecuaciones son fundamentalmente erróneas y no se pueden sostener, y nosotros para obtener un nuevo conjunto de ecuaciones de campo.

### 15.1 Hilbert

Hilbert era un especialista en principios de variación y tuvo la brillante idea de decir "El lado derecho de las ecuaciones de campo gravitacionales vienen de una acción, entonces por qué no intentamos y obtenemos el lado izquierdo también de una acción?" Decidió trabajar a través de las acciones más simples<sup>3</sup> que pudo, hasta que consiguió uno que funcionara. Su resultado final fue el siguiente:

$$S_H[g] := \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} R := \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \text{Ric}_{ab} g^{ab}.$$

El objetivo es variar esta acción con respecto a  $g_{ab}$  y obtener un tensor, que denominamos  $-G^{ab}$ .<sup>4</sup> El siguiente paso obvio es hacer esta variación y hallar lo que es  $-G^{ab}$ .

<sup>1</sup>Recordemos que cuando decimos espaciotiempo nos referimos a *espaciotiempo relativista*.

<sup>2</sup>Ver mis notas sobre el curso de teoría de cuerdas del Dr. Shiraz Minwalla, para un esquema de la prueba.

<sup>3</sup>Es decir, preguntó qué combinación de objetos dará un campo escalar.

<sup>4</sup>El signo menos no es más que una convención de notación.



## 15.2 Variación de $S_H$

Tenemos

$$\delta S_H[g] = \int_{\mathcal{M}} [\delta\sqrt{-g} \cdot \text{Ric}_{ab} \cdot g^{ab} + \sqrt{-g} \cdot \delta\text{Ric}_{ab} \cdot g^{ab} + \sqrt{-g} \cdot \text{Ric}_{ab} \cdot \delta g^{ab}].$$

Veamos esto término a término.

Consideremos primero  $\delta g$ , de  $g := \det g = \exp(\text{Tr}(\ln g))$ , tenemos

$$\delta g = -\frac{g \cdot g^{ab} \delta g_{ab}}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} \cdot g^{ab} \cdot \delta g_{ab}$$

A continuación, observemos  $\delta g^{ab}$ . Sabemos que  $g^{ac}g_{cb} = \delta_b^a$ , y de ahí tenemos

$$\delta g^{ac} \cdot g_{cb} + g^{ac} \cdot \delta g_{cb} = 0 \quad \implies \quad \delta g^{ab} = -g^{am} \cdot g^{bn} \cdot \delta g_{mn},$$

donde hemos renombrado los índices en la última ecuación.

Finalmente, tenemos que resolver  $\delta\text{Ric}_{ab}$ . Esto es un poco más complicado, e implica que hagamos algunos pasos inteligentes. Comenzamos por considerar las coordenadas normales,<sup>5</sup> lo que nos da

$$\delta\text{Ric}_{ab} = \delta(\Gamma_{am,b}^m) - \delta(\Gamma_{ab,m}^m) = (\delta\Gamma_{am}^m)_{,b} - (\delta\Gamma_{ab}^m)_{,m}.$$

Esto parece una idea horrible porque los resultados dependen del hecho de que estamos en coordenadas normales. Sin embargo, ahora utilizamos un truco muy inteligente. Recordemos que  $\Gamma$ s no son componentes de un tensor porque tienen un término en su transformación dado por derivadas segundas. Y constatamos que ese término no depende de las propias  $\Gamma$ s, y por lo tanto si tomamos la diferencia de las dos  $\Gamma$ s este término desaparecerá en la transformación. Es decir

$$\Gamma_{(x)ij}^k - \tilde{\Gamma}_{(x)ij}^k$$

se transforman como los componentes de un tensor. Observamos entonces que la derivada esencialmente compara dos  $\Gamma$ s, y de ahí se concluye que las derivadas de las  $\Gamma$ s son por supuesto componentes de un tensor  $(1, 2)$ . Esto está bien, pero entonces caemos en el problema de que no podemos simplemente tomar la derivada de un tensor. Este problema se resuelve fácilmente dado que estamos considerando coordenadas normales, y por tanto la derivada covariante y las derivadas parciales coinciden (es decir que las  $\Gamma$ s en coordenadas normales desaparecen ("vanish")). Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \cdot g^{ab} \cdot \delta\text{Ric}_{ab} &= \sqrt{-g} \cdot g^{ab} \cdot [(\delta\Gamma_{am}^m)_{,b} - (\delta\Gamma_{ab}^m)_{,m}] \\ &= \sqrt{-g} \cdot [(g^{ab}\delta\Gamma_{am}^m)_{,b} - (g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^m)_{,m}] \\ &=: \sqrt{-g} [A^b_{,b} - B^m_{,m}], \end{aligned}$$

donde hemos definido  $A^b := g^{ab}\delta\Gamma_{am}^m$  y de forma similar hemos usado para  $B^b$  la condición de compatibilidad métrica (ya que el espaciotiempo está dotado de la conexión Levi-Civita) para 'mover  $g^{ab}$  dentro de la derivada covariante'. A continuación tenemos

$$\sqrt{-g}_{,b} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} \cdot g^{ac} \cdot g_{ac,b},$$

<sup>5</sup>Esto es un espacio plano *local*, por lo que  $\Gamma$ s desaparece, pero sus derivadas no tienen porqué desaparecer.

lo cual, usando las coordenadas normales junto con la condición de compatibilidad métrica, nos da

$$(\sqrt{-g}A)^b{}_{,b} = \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2}g^{ac} \cdot g_{ac,b} \cdot A^b + A^b{}_{;b} \right] = \sqrt{-g}A^b{}_{;b}.$$

Por lo que finalmente llegamos a

$$\sqrt{-g} \cdot g^{ab} \cdot \delta \text{Ric}_{ab} = (\sqrt{-g}A)^b{}_{,b} - (\sqrt{-g}B)^b{}_{,b}.$$

Agrupando términos, tenemos

$$\delta S_H[g] = \int_{\mathcal{M}} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{cd} (\delta g_{cd}) g^{ab} \text{Ric}_{ab} - \sqrt{-g} g^{ac} g^{bd} \delta g_{cd} \text{Ric}_{ab} + (\sqrt{-g}A)^b{}_{,b} - (\sqrt{-g}B)^b{}_{,b} \right].$$

Ahora observamos que los dos últimos términos son integrales de volumen sobre divergencias y entonces, por la ley de Stoke, hay términos de superficie. Estos términos, por consiguiente, no contribuyen a las ecuaciones de movimiento, que es en lo que estamos interesados, y así podemos esencialmente descartarlas. . Esto nos deja finalmente con

$$0 = \delta S_H = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \delta g_{ab} \left[ \frac{1}{2} g^{ab} R - \text{Ric}^{ab} \right],$$

donde hemos usado  $R := g^{ab} \text{Ric}_{ab}$  y  $\text{Ric}^{cd} := g^{ac} g^{bd} \text{Ric}_{ab}$  y luego hemos reetiquetado los índices. Esto debe ser válido para una variación arbitraria  $\delta g_{ab}$ , y así concluimos

$$G^{ab} = \text{Ric}^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R.$$

Esta expresión es conocida como la (componentes de la) **curvatura de Einstein**. Son las ecuaciones de campo para el espaciotiempo del vacío, es decir, uno sin materia. Si incluimos materia en el espaciotiempo, la acción cambia de acuerdo con la sesión anterior, y obtenemos<sup>6</sup>

$$G_{ab} = \text{Ric}_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi G_N T_{ab}.$$

Estas ecuaciones son conocidas como las **ecuaciones de Einstein**, ya que Einstein también llegó a este resultado utilizando argumentos más físicos. Como tal, la acción de Hilbert suele llamarse acción de Einstein-Hilbert y se denota

$$S_{EH}[g] = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} R.$$

*Observación 15.2.1.* teniendo en cuenta la observación hecha al principio de esta sesión, ya tenemos una vía clara para distinguir la curvatura de Riemann, la curvatura de Ricci y el escalar de Ricci, a saber, el número de índices. Escribiremos por lo tanto las ecuaciones de Einstein simplemente como

$$G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R = 8\pi G_N T^{ab}.$$

Hacemos esto tanto por brevedad de la notación, como también porque es así como aparecen en prácticamente todos los libros de texto.

<sup>6</sup>Nótese que aquí hemos movido los índices hacia abajo. Es molesto mover los índices en ecuaciones arriba y abajo de esta manera, sin embargo hay que tener cuidado al hacerlo ya que para hacer eso los componentes de la métrica se han usado dos veces.

### 15.3 Solución del problema de $(\nabla_a T)^{ab} = 0$

Recordemos la identidad de Bianchi en componentes<sup>7</sup>

$$R^a{}_{b[mn;\ell]} = R^a{}_{bmn;\ell} + R^a{}_{b\ell m;n} + R^a{}_{bn\ell;m} = 0.$$

Si entonces utilizamos la condición de compatibilidad métrica obtenemos la llamada identidad *contraída* de Bianchi

$$R_{ab[mn;\ell]} = R_{abmn;\ell} + R_{ab\ell m;n} + R_{abn\ell;m} = 0.$$

Puede usarse más contracción (es decir, utilizando los componentes métricos para igualar los índices) y dar<sup>8</sup>

$$R^\ell{}_{m;\ell} = \frac{1}{2}R_{;m},$$

y así obtenemos

$$G^{ab}{}_{;a} := (\nabla_a G)^{ab} = 0,$$

lo cual resuelve el problema.

### 15.4 Variaciones de las Ecuaciones de Campo

Primero elijamos unidades tal como  $G_N = 8\pi$ , de manera que el factor en las ecuaciones de Einstein se convierta en 1, y así tenemos

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = T_{ab}.$$

Ahora vamos a manipular esto un poco para expresarlo de maneras diferentes.

#### 15.4.1 Expresión escalar de Ricci

Consideremos primero a contracción con  $g^{ab}$ . Esto da

$$g^{ab}T_{ab} = g^{ab}R_{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}g_{ab}R$$

$$T = R - 2R$$

$$T = -R,$$

donde hemos usado  $g^{ab}g_{ab} = \delta_a^a = \dim \mathcal{M} = 4$ , y donde hemos definido  $T := g^{ab}T_{ab}$ . Sustituyendo esto en las ecuaciones de Einstein, obtenemos

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T =: \hat{T}_{ab}.$$

Por tanto tenemos  $R_{ab} = \hat{T}_{ab}$ , que tiene la misma forma que Einstein propuso al comienzo de esta sesión, con la única diferencia de que tenemos que usar el tensor energía-momento modificado.

<sup>7</sup>Técnicamente aquí falta un 3!, pero la parte derecha desaparece por lo que no es importante.

<sup>8</sup>Véase el tutorial.

### 15.4.2 Constante Cosmológica

Se podría modificar la acción Einstein-Hilbert para incluir un término constante  $\Lambda$ , conocido como la **constante cosmológica**. Es decir

$$S_{EH}[g] = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}(R + 2\Lambda).$$

Se puede preguntar por qué lo hacemos, y la respuesta tiene que ver con hablar de un universo en expansión. Einstein inicialmente la incluyó como un valor negativo para asegurar que el universo era estático (es decir, sin expandirse). Hubble aseguró entonces que sin duda el universo se estaba expandiendo, por lo que podíamos tener  $\Lambda = 0$ , lo que llevó a Einstein a llamarlo su "mayor error". Ahora ocurre que el universo no sólo se está expandiendo, sino que también se está acelerando en su expansión y por eso se requiere  $\Lambda > 0$ .

La verdadera pregunta es, sin embargo, ¿qué es en la Tierra la constante cosmológica? Bien, si pensamos que  $\int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}R$  es la gravedad, nos encontramos con que  $\Lambda$  es una contribución de la materia a la acción que siempre está ahí. Es decir, que tiene una contribución a las ecuaciones de campo de la forma  $\Lambda g_{ab}$ .

Esto es bastante notable, sin embargo, ya que  $\Lambda$  es un constante, y  $g_{ab} \neq 0$  en todas partes<sup>9</sup> y por lo tanto esta contribución de la materia toma el mismo valor sobre la *totalidad* del universo! Téngase en cuenta que tampoco se acopla a cualquier campo. Esto es lo que la gente llama *energía oscura*.

La siguiente pregunta es: qué es lo que causa la energía oscura? La respuesta es que nadie lo sabe.

Nuestras observaciones nos dicen que, aunque  $\Lambda \neq 0$ , es muy pequeña. Eso es lo que nos preocupa. Necesitamos algo que exista en todo el universo de forma constante, pero que tampoco aporte mucha energía al sistema del universo. Para hacerse una idea de la gravedad de este problema, consideremos la siguiente propuesta.

Se sugirió que las fluctuaciones en el vacío de las teorías cuánticas de campo podrían ser la raíz de la energía oscura. Sin embargo, el cálculo de la contribución a la energía procedente únicamente de las fluctuaciones QCD (Quantum Chromodynamics) dio un valor de  $\Lambda$  que era 120 órdenes de magnitud más grande!

---

<sup>9</sup>Bueno, al menos en todos los lugares en los que está definida. Quién sabe qué valores toma en lugares como la singularidad.

# 16 | Geometría Óptica I

Observación 16.0.1. Esta sesión es impartida por el Dr. Werner, y decide utilizar la firma opuesta a la del Dr. Schuller, es decir, utiliza  $(-, +, +, +)$ . Voy a cambiar a esta firma también como el Dr. Schuller cambia a ella de todos modos en la sesión 20 y también es mi firma preferida.

Notación. El Dr. Werner usa la notación en la cual los índices griegos representan componentes del espaciotiempo (es decir,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), mientras que los índices latinos representan los componentes espaciales (es decir,  $i = 1, 2, 3$ ). Nosotros vamos a usar aquí la convención contraria, ya que es la hemos venido utilizando a lo largo de estas notas.

Vamos a observar la *lente gravitacional*, que es la curvatura de la luz en el espacio. Históricamente, las lentes gravitacionales han desempeñado un papel realmente importante en el campo de la relatividad general, ya que fueron una de las primeras predicciones propuestas de la teoría. Para estudiar las lentes gravitacionales, volveremos primero al principio de Fermat e intentaremos expresarlo en el contexto de la Relatividad general.

## 16.1 Principio de Fermat

Clásicamente, el principio de Fermat es la declaración de que la luz ha de seguir una trayectoria que minimice su tiempo. Es decir,

$$0 = \delta \int_{\gamma} dt = \delta \int_{\gamma} \frac{1}{v} d\ell = \delta \int_{\gamma} \frac{n}{c} d\ell.$$

Sin embargo, hay un problema al intentar hacer esto en la RG (Relatividad General); los rayos de luz siguen geodésicas nulas y, por tanto, tienen una longitud espacial nula. Es decir  $g(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) = 0$  para toda  $\gamma$  que representa el camino del rayo de luz.

Para proceder aquí, vamos a asumir que nuestro espaciotiempo es el llamado *estacionario*.

**Definición** (Espaciotiempo Estacionario). Un espaciotiempo  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g, T)$  es llamado **estacionario** si admite un campo vectorial Killing  $K$  tal que  $g(K, K) < 0$ .<sup>1</sup>

Afirmación 16.1.1. Un espaciotiempo estacionario es aquel en el que podemos encontrar una carta tal que las componentes de la métrica no dependen del tiempo.

<sup>1</sup>Técnicamente todo lo que requerimos es que el espaciotiempo tenga una región asintóticamente plana y que el campo vectorial de Killing satisfaga  $g(K, K) < 0$  en esta región. Esta distinción se traslada a algunas de las siguientes expresiones, pero la ignoraremos en estas notas, ya que la idea general se mantiene.

*Proof.* Recordemos que un campo vectorial es Killing si  $\mathcal{L}_K g = 0$ . El ejercicio al final de la sesión 11 muestra que en una carta esta condición se lee

$$T^c g_{ab,c} + g_{cb} T^c_{,a} + g_{ca} T^c_{,b} = 0.$$

Imaginemos ahora que cogemos una carta tal que  $T = \delta_0^a \partial_a = \partial_0$ , entonces los dos segundos términos desaparecen y nos quedamos simplemente con

$$g_{ab,0} = 0,$$

que es la declaración de que los componentes métricos son independiente del tiempo en esta carta.  $\square$

En la carta descrita arriba, un espaciotiempo estacionario general es aquel cuya métrica es de la forma

$$g = -dt \otimes dt + \omega_\mu (dt \otimes dx^\mu + dx^\mu \otimes dt) + h_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

donde  $h_{\mu\nu} = \text{diag}(+, +, +)$ , y donde ambos  $h_{\mu\nu}$  y  $\omega_\mu$  son funciones únicamente de las  $x$ s, es decir  $h_{\mu\nu,0} = 0 = \omega_{\mu,0}$ .

**Definición** (Espaciotiempo Estático). Un espaciotiempo  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g, T)$  es denominado **estático** si es estacionario e *hipersuperficie-ortogonal*, lo que esencialmente significa  $\omega_\mu = 0$  para todo  $\mu \in \{1, 2, 3\}$ .

Observación 16.1.2. Las  $\omega_i$ s tienen la bonita interpretación geométrica de ser (la parte espacial) de un vector de torsión, que corresponde a la rotación del espaciotiempo. Así pues, la diferencia entre un espaciotiempo estacionario y uno estático puede ser considerada como que permite o no la rotación.

Terminaré transcribiendo esta clase, y después las tres próximas. Aunque he transcrito todas las conferencias del Dr. Schuller. Estas conferencias están muy bien enseñadas (sólo decidí terminar el material del Dr. Schuller primero), así que por favor véanlas si aún no lo han hecho.

1. Principio GR — es la variación del tiempo de llegada la que desaparece, no el tiempo total.
2. Geometría Finsler-Randers
3. Métrica óptica
4. Schwarzschild
5. Curvatura Gaussiana

## 17 | Geometría óptica II

1. Desviación geodésica
2. Demostrar que para el espaciotiempo de Schwarzschild las geodésicas divergen localmente en todas partes.
3. Si eso es cierto, ¿cómo se obtienen múltiples imágenes de las estrellas? Debe haber alguna propiedad global que las haga converger de nuevo.
4. Guass-Bonnet

## 18 | Formulación canónica de GR I



## 19 | La formulación canónica de GR II

## 20 | Cosmología: La época temprana

La Cosmología es el estudio del espacio-tiempo de todo el universo. Como hemos visto, las ecuaciones de Einstein son muy poco lineales y, por tanto, difíciles de resolver.<sup>1</sup> Sin embargo, nos permiten formular la pregunta científica de mayor alcance posible: "¿Cómo evolucionó el universo?"

Ahora parece una tarea increíblemente audaz intentar resolver las ecuaciones de Einstein para todo el universo, cuando acabamos de decir que ya son muy difíciles de resolver a escalas mucho más pequeñas con condiciones restrictivas. De hecho, resolver las ecuaciones de Einstein para todo el universo puede considerarse como el problema "más difícil" porque nuestro tensor de energía-momento debe incluir "toda" la materia del universo.

Para resolver el problema vamos a introducir algunas ideas y a utilizarlas de forma imprudente, lo que significa que no está claro a priori si es un procedimiento válido. Seguiremos comentando esto a medida que avancemos.

*Observación 20.0.1.* Como mencionamos en Observación 16.0.1, ahora usaremos la firma como  $(-, +, +, +)$  para que cuando nos limitemos a la parte espacial del universo (lo que haremos a continuación) no tengamos que llevar signos menos.

### 20.1 Supuesto de homogeneidad espacial & Isotropía a gran escala

La idea es suponer que si nos "alejáramos" lo suficiente y observáramos el universo a gran escala, el "desorden" a pequeña escala desaparecería y obtendríamos una imagen homogénea (igual en todos los lugares) e isotrópica (igual en todas las direcciones).

*Observación 20.1.1.* Nótese que hemos dicho homogeneidad e isotropía *espaciales*. Sería demasiado suponer que el universo es también homogéneo e isótropo en el tiempo. Sin embargo, la relatividad se basa en la idea de que el espacio y el tiempo son esencialmente indistinguibles (en el sentido de que son dos partes de la misma cosa), por lo que debemos aclarar qué entendemos por espacial y temporal. Volveremos sobre ello.

Estas suposiciones nos permiten hacer un enfoque simétrico para la métrica del espacio-tiempo del universo, y al hacerlo simplificamos masivamente las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, es importante señalar que hacer esto es muy imprudente. No tenemos la garantía de que hacer tal enfoque a priori nos dé la misma solución que obtendríamos al resolver primero el problema y *luego* imponiendo el enfoque. Sin embargo, este es el método que se utiliza en la cosmología dominante, por lo que lo adoptaremos en este caso.

---

<sup>1</sup>De hecho, nadie ha sido capaz de escribir una *solución* general.

*Observación 20.1.2.* Téngase en cuenta que el hecho de que una idea sea adoptada por la corriente principal de investigación no tiene por qué ser cierta. Esto es sólo un comentario para resaltar el punto de que cuando se investiga no siempre es una mala idea estar en desacuerdo con las ideas de la corriente principal (siempre que se tengan pruebas para apoyar las afirmaciones).

Recordando la discusión del final de la lección 11, podemos formular los anteriores supuestos de simetría de forma más precisa. Decimos que nuestro espaciotiempo admite 6 campos<sup>2</sup> vectoriales Killing espaciales, que designamos como  $J_1, J_2, J_3, P_1, P_2$  y  $P_3$ . Los  $J_a$ s corresponden a las simetrías de rotación (es decir, la condición de isotropía) y los  $P_a$ s corresponden a las simetrías de traslación (es decir, la condición de homogeneidad). Satisfacen las siguientes relaciones

$$[J_a, J_b] = \sum_{c=1}^3 \epsilon_{abc} J_c, \quad [P_a, P_b] = 0, \quad \text{y} \quad [J_a, P_b] = \sum_{c=1}^3 \epsilon_{abc} J_c.$$

*Observación 20.1.3.* Obsérvese que se trata de una condición para todo el espaciotiempo, no sólo para algún tipo de rodaja espacial (sea lo que sea). Sólo proporcionando estos 6 campos vectoriales de Killing podemos averiguar lo que queríamos decir antes con la homogeneidad e isotropía "espaciales". Es decir, observamos los "planos" que abarcan estos 6 campos vectoriales de Killing y los identificamos como planos espaciales y los campos vectoriales ortogonales a ellos como el flujo temporal.

Es importante tener cuidado con llevar esta idea demasiado lejos. Sabemos que los observadores que se mueven tienen "ejes temporales inclinados" entre sí, por lo que podríamos pensar que sus planos espaciales, y por tanto los vectores de Killing, también se inclinan. Evidentemente, esto no es físico (una simetría de una métrica es independiente de que un observador la perciba) y, por tanto, no puede ser el caso.

Afortunadamente, para 6 campos vectoriales de Killing (linealmente independientes- $\mathbb{R}$ ) existe un atajo<sup>3</sup> para entender cómo es una métrica con tales simetrías.

**Lema 20.1.4.** *En una variedad  $d$ -dimensional el número máximo de campos vectoriales de Killing -linealmente independientes- $\mathbb{R}$  es  $d(d+1)/2$ , que es igual al número de funciones componentes independientes de una métrica en  $d$ -dimensiones.*

*Proof.* (Por ejemplo)<sup>4</sup> Recordemos que la condición del vector de Killing puede expresarse como

$$g(\nabla_X K, Y) + g(X, \nabla_Y K) = 0.$$

Si elegimos una carta en la que simplemente tenemos  $X = \partial_a$  y  $Y = \partial_b$  (es decir, apuntan a lo largo de una de las direcciones de la base cada uno) entonces esta condición se convierte en<sup>5</sup>

$$K_{b;a} + K_{a;b} = 0.$$

<sup>2</sup>Es decir  $g(K, K) > 0$  en nuestra firma actualizada.

<sup>3</sup>En relación a tener que introducir una carta de coordenadas y trabajar a partir de ella.

<sup>4</sup>Una prueba completa no es muy diferente y se puede encontrar en *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* de Weinberg, en la Parte 4, Capítulo 13, Sección 1.

<sup>5</sup>Intentar mostrar esto como un ejercicio adicional.

Ahora recordemos que la definición del tensor de Riemann (en ausencia de Torsión) puede escribirse como

$$\text{Riem}^d_{cab}K_d = \nabla_b \nabla_a K_c - \nabla_a \nabla_b K_c =: K_{c;a;b} - K_{c;b;a}.$$

Poniendo esto en la identidad de Bianchi

$$\text{Riem}^d_{[abc]} = 0$$

nos da

$$(K_{a;b} - K_{b;a});_c + (K_{b;c} - K_{c;b});_a + (K_{c;a} - K_{a;c});_b = 0,$$

que utilizando la condición graficada (en carta) de Killing nos da

$$K_{a;b;c} = K_{c;b;a} - K_{c;a;b} = -R^d_{cab}K_d.$$

Ahora viene la parte "por ejemplo". Consideremos un espacio plano  $d$ -dimensional, entonces las componentes del tensor de Riemann desaparecen todas y podemos elegir una carta tal que las  $\Gamma$ s desaparecen, y así la derivada covariante se convierte simplemente en la derivada parcial. Por tanto, tenemos

$$K_{a,b,c} = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad K_a = \beta_{ab}x^b + \alpha_a,$$

para las constantes  $\beta_{ab}$  y  $\alpha_a$ .

Ahora sólo tenemos que imponer la condición de independencia lineal. La antisimetría nos dice que  $\beta_{ab} = -\beta_{ba}$  y por lo tanto hay  $d(d-1)/2$  componentes  $\beta_{ab}$  independientes y claramente hay  $d$  componentes  $\alpha_a$  independientes. Sumando ambos nos da

$$\frac{d(d-1)}{2} + d = \frac{d(d+1)}{2}.$$

□

Un espacio con el máximo número de campos vectoriales de Killing se denomina espacio maximalista y se dice que la métrica es simétrica al máximo.

A partir del lema anterior (y del hecho de que  $3(3+1)/2 = 6$ ) vemos que la métrica espacial inducida a partir de la métrica del espacio-tiempo en los tramos espaciales abarcados por los campos vectoriales de Killing es la métrica de un espacio de 3 dimensiones de máxima simetría.

**Definición** (Curvatura de Sección). Dada una variedad Riemann  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$  y dos vectores tangentes linealmente independientes en el mismo punto  $X, Y \in T_p\mathcal{M}$ , podemos definir la **curvatura de sección** como

$$\kappa(X, Y) := \frac{g(\text{Riem}(\cdot, Y, X, Y), X)}{g(X, X)g(Y, Y) - [g(X, Y)]^2},$$

donde  $\text{Riem}(\cdot, Y, X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y \in T_p\mathcal{M}$ .

La curvatura de sección puede verse geoméricamente como el producto de las curvaturas en un punto. Por ejemplo, las dos direcciones de curvatura de una esfera "van hacia dentro", por lo que tienen el mismo signo y por tanto  $\kappa > 0$ . Alternativamente, la garganta de un agujero de gusano tiene  $\kappa < 0$ .

*Observación 20.1.5.* Obsérvese que la curvatura de la sección en realidad sólo depende del plano-2  $\sigma_p \subset T_p\mathcal{M}$  abarcada por  $X$  e  $Y$ . Para espacios de dimensión  $d > 2$ , los diferentes 2-plano nos hablan del producto de las diferentes curvaturas.

**Definición** (Curvatura (de Sección) Constante). Se dice que un espacio tiene **curvatura (de sección) constante** si  $\kappa$  toma el mismo valor en cada punto en  $\mathcal{M}$  y cada 2-plano.

**Proposición 20.1.6.** *Las variedades riemannianas con curvatura constante pueden tener una de estas tres geometrías:*

- (i) plana  $\kappa = 0$ ,
- (ii) esférica  $\kappa > 0$ , o
- (iii) hiperbólica  $\kappa < 0$ .

Esos espacios son denominados **formas espaciales**.

para un espaciotiempo con curvatura constante tenemos

$$\text{Riem}_{\alpha\beta\rho\delta} = \kappa(\gamma_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\rho}),$$

donde  $\gamma_{\alpha\beta}$  es la métrica espacial que puede escribirse en una determinada carta como

$$\gamma_{\alpha\beta}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}_{\alpha\beta}.$$

La métrica espaciotiempo tiene entonces la forma

$$g_{ab}(t, r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}_{ab},$$

donde  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es denominado **factor de escala**, que es toda la libertad que queda después de la reducción de la simetría. Geométricamente,  $a(t)$  nos dice cómo se relacionan los diferentes cortes espaciales. Es decir, si tuviéramos un espacio espacial esférico y  $a(t) = t$  entonces los espacios espaciales serían un conjunto de esferas de radio creciente.

**Lema 20.1.7.** *Podemos redefinir  $a(t)$  de manera que nuestra condición para las geometrías de curvatura constante se convierte en  $\kappa = 0, \pm 1$ .*

*Observación 20.1.8.* Nótese que, siempre que  $a(t)$  no sea constante, el campo vectorial temporal (es decir, la ortogonal a todos los campos vectoriales de Killing) no es Killing. Es decir, en nuestra carta

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} g \neq 0.$$

Esta es la afirmación de que el universo no tiene por qué ser estacionario.

## 20.2 Ecuaciones de Einstein

### 20.2.1 Tensor de Ricci

Busquemos las  $\Gamma$ s para nuestro espaciotiempo anterior. Tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}g^{t\sigma}(g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\beta\sigma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}) \\ &= -\frac{1}{2}\partial_t\langle a^2(t)\gamma_{\alpha\beta}(r, \theta, \varphi) \rangle \\ &= a\dot{a}\gamma_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que  $g_{ab}$  es diagonal por lo que sólo tenemos que tomar  $\sigma = t$ . De igual manera tenemos

$$\Gamma^\alpha_{t\beta} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^\alpha_\beta.$$

Tenemos también que todas las  $\Gamma$ s espaciales (es decir, las que son de la forma  $\Gamma^\alpha_{\beta\rho}$ ) sólo dependen de  $\gamma$  métrica-3.

#### Ejercicio

Mostrar que todas las  $\Gamma$ s no relacionadas con lo anterior (es decir, que no pueden ser obtenidas por simetría de índices) desaparecen.

*Esto es bastante tedioso, pero vale la pena hacerlo para practicar.*

Podemos usar los resultados anteriores para mostrar que los componentes del tensor de Ricci son

$$\text{Ric}_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad \text{y} \quad \text{Ric}_{\alpha\beta} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa)\gamma_{\alpha\beta}.$$

#### Ejercicio

Mostrar los resultados del tensor de Ricci anterior.

### 20.2.2 Materia

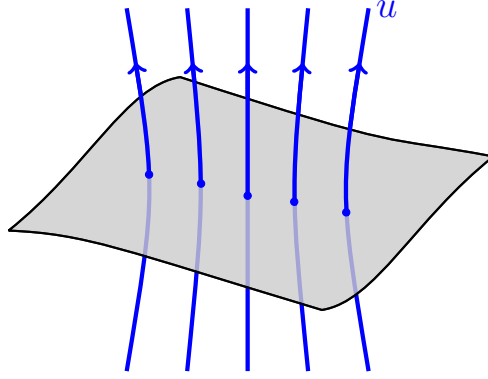
Hasta ahora sólo hemos utilizado las condiciones de simetría para hablar de la geometría, y no de la propia distribución de la materia. Ahora podemos utilizar nuestras condiciones de simetría exactamente para esto, y al hacerlo obtener el lado derecho de las ecuaciones de Einstein. Es decir, queremos averiguar qué tipo de distribuciones de materia están permitidas para que se cumplan las condiciones de simetría.

El truco consiste en volver a "alejarnos" y observar sólo la materia a una escala muy grande. Modelamos la materia en el universo mediante el siguiente tensor de energía-momento

$$T^{ab} = (\rho + p)u^a u^b + pg^{ab},$$

donde  $u^a = (1, 0, 0, 0)^a$  en nuestras coordenadas. Dicho modelo es conocido como **fluido perfecto** de **densidad**  $\rho$  y **presión**  $p$ .

En términos gráficos, esto se ve como la idea de que las líneas del mundo de las estructuras a gran escala (por ejemplo, los cúmulos galácticos) fluyen a lo largo de alguna dirección temporal, dada por  $u$ .



*Observación 20.2.1.* Nótese que la presión y la densidad pueden ser funciones de  $t$ , pero no pueden ser funciones de  $(r, \theta, \varphi)$ . Esta es la afirmación de que pueden variar a través del tiempo, pero si queremos homogeneidad e isotropía, no pueden variar a través del espacio.

*Terminología.* El campo vectorial  $u$  es a menudo denominado **tiempo cósmico**, ya que representa cómo fluye el cosmos a través del tiempo.

### 20.2.3 Reducción de las Ecuaciones de Einstein

Recordemos que podemos escribir las ecuaciones de Einstein como

$$\text{Ric}_{ab} = 8\pi G_N \left( T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right).$$

Insertando nuestro enfoque para  $g_{ab}$  y  $T_{ab}$  podemos mostrar

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p)a \quad (\text{Ecuación de la Aceleración})$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \rho - \frac{\kappa}{a^2} \quad (\text{Ecuación de Friedmann})$$

**Definición** (Función de Hubble). Definimos la **función de Hubble**<sup>6</sup> como

$$H := \frac{\dot{a}}{a}.$$

<sup>6</sup>A menudo es denominada constante de Hubble, pero no es necesario que sea una constante, por lo que la llamamos función de Hubble.

### Ejercicio

Deducir las ecuaciones de la Aceleración y de Friedmann, y mostrar que si incluimos una constante cosmológica, el lado derecho de ambas ecuaciones obtiene un  $+\frac{\Lambda}{3}$ .

*Pista: Para la segunda parte, recordemos que incluyendo la constante cosmológica en la acción de Einstein-Hilbert obtenemos una contribución de  $\Lambda$  a las ecuaciones de Einstein. Es decir, que tenemos*

$$\text{Ric}_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G_N T_{ab}$$

*Empezar desde aquí y hacer la contracción para obtener una expresión para  $\text{Ric}_{ab} = \dots$  y a continuación usar los resultados de arriba.*

## 20.3 Modelos de Materia Fluida Perfecta

El resultado hasta ahora es que para nuestro universo (con los supuestos simétricos) tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas, a saber  $\rho$ ,  $p$  y  $a$ . Obviamente esto representa un problema.

¿Qué hacemos? Bueno, si pudiéramos obtener otra ecuación que relacionara al menos dos de estas incógnitas, tendríamos más posibilidades. Las dos que parecen más físicas de relacionar son la densidad y la presión, por lo que hacemos la pregunta "¿podemos obtener una relación entre  $\rho$  y  $p$  de un conocimiento más detallado de lo que es la naturaleza de nuestro fluido perfecto?"

**Definición** (Ecuación de Estado). Una relación entre el momento y la densidad  $p = \mathcal{P}(\rho)$  es llamada una **ecuación de estado** para el fluido perfecto.

Solemos mirar siempre a una relación lineal, es decir  $p = \omega \cdot \rho$  para una constante  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Entonces, ¿qué podría ser el fluido? Por el momento, nos limitaremos a considerar un Universo con un solo tipo de materia (en la próxima sesión consideraremos varios tipos). Los cuatro tipos principales son:

- (i) Un fluido constituido por fotones.<sup>7</sup> Obviamente, esto debe satisfacer la teoría de Maxwell, que nos dice que el tensor energía-momento debe ser libre de trazas

$$T^{ab}g_{ab} = 0.$$

Tenemos por tanto la condición de que <sup>8</sup>

$$p = \frac{1}{3}\rho,$$

lo cual nos dice que  $\omega = 1/3$  para el fluido *radiación*. Esto también resulta ser una buena aproximación para las partículas masivas ultrarrelativistas.

<sup>7</sup>Empleamos aquí la palabra "fotón" en un sentido bastante laxo. Estamos discutiendo la física clásica y por lo tanto no se debe hablar de fotones.

<sup>8</sup>Si han hecho el ejercicio anterior, este resultado debería ser fácil de ver.



- (ii) Otro tipo de fluido es el llamado *polvo*. Simplemente representa un conjunto de partículas que no interactúan y, por tanto, no pueden ejercer una presión. Concluimos, pues, que  $\omega = 0$  para el polvo.
- (iii) El caso de  $\omega = -1$  corresponde a la ecuación de movimiento para la *constante cosmológica*. Corresponde a un fluido que tiene en todas partes una presión negativa.
- (iv) El caso de  $\omega = -1/3$  capta la curvatura espacial en una ecuación de estado.

*Observación 20.3.1.* Para (iii) y (iv) anteriores, lo que queremos decir es que podemos imitar el comportamiento de estas cantidades introduciendo materia en el universo con los respectivos valores de  $\omega$ .

## 20.4 Soluciones

Dada la ecuación de aceleración, la ecuación de Friedmann y una ecuación de estado para un determinado tipo de materia, podemos resolver el sistema. En los tutoriales demostraremos que se cumple lo siguiente. Para  $\kappa = 0 = \Lambda$ :

- (i)  $H^2 \sim \rho \sim a^{-n(\omega)}$ , where  $n(\omega) = 3(1 + \omega)$
- (ii) concretamente,

$$a(t) = a_0 \cdot \begin{cases} t^{2/n(\omega)} & \text{if } \omega \neq -1, \\ e^{Ht} & \text{if } \omega = -1. \end{cases}$$

*Observación 20.4.1.* Nótese que caso  $\omega = -1$  para  $a(t)$  nos dice que  $H$  debe ser aquí constante, ya que  $H = \dot{a}/a = \dot{H}t + H$ , y por eso  $\dot{H} = 0$ .

La condición  $\omega \neq -1$  nos da un resultado muy importante:

$$\rho(t) \sim t^{-2}$$

para *todos* los tipos de materia con  $\omega \neq -1$ . Este es un resultado importante porque vemos que a medida que  $t \rightarrow 0$ ,  $\rho$  diverge. Es decir, la densidad tiende al infinito al comienzo del tiempo cósmico.

Ahora bien, esto podría parecer sólo un artificio de nuestra elección de coordenadas, pero sabemos que la densidad aparece en las ecuaciones de Einstein y, por tanto, si  $\rho$  diverge, la curvatura Ricci también tiene que divergir. Pero la curvatura de Ricci es un tensor y por lo tanto si diverge en una carta (gráfico) debe divergir en todas las cartas, y así obtenemos una curvatura infinita de nuestro espaciotiempo en este punto. Claramente no podemos tener esto físicamente y por lo tanto debemos eliminar este punto de nuestro espaciotiempo. Otra forma de ver este último punto es que en  $t = 0$ ,  $a = 0$  y por tanto la métrica del espaciotiempo se vuelve no-inevitable. Está claro que no podemos tener esto y por lo tanto debemos excluir este punto. Así que, en otras palabras, no tiene sentido la pregunta "¿qué pasó antes de  $t = 0$ ?"

Si juntamos todo esto, vemos que lo que acabamos de describir es el Big Bang. Esta es otra de las razones por las que  $t$  se denomina tiempo cósmico, ya que nos indica la edad del cosmos. Es evidente que este resultado depende explícitamente de todas las suposiciones que

hemos hecho hasta ahora, a saber, la simetría perfecta de nuestro universo y el hecho de que nuestras ecuaciones de estado sean lineales. Estaría muy justificado preguntarse "¿desaparece este comportamiento si no hacemos tales condiciones?". De hecho, esto es lo que Hawking, Penrose y otros trataron de estudiar.

## 21 | Cosmología: La época tardía

Ahora vamos a considerar varios tipos de materia simultáneamente. Sin embargo, seguiremos suponiendo que nuestras ecuaciones de estado son lineales. Lo hacemos simplemente porque estas conferencias pretenden ser una introducción al campo de la cosmología y, por tanto, tenemos que especializarnos un poco. Por supuesto, las ecuaciones de estado lineales no cubren en absoluto todas las situaciones posibles, y eso es parte de la investigación en cosmología: buscar lo que ocurre si cambiamos nuestras condiciones.

La información que hemos obtenido hasta ahora puede resumirse en el siguiente cuadro.

$\omega$	$n(\omega)$	$a(t)$	tipo de materia
1/3	4	$t^{1/2}$	radiación
0	3	$t^{2/3}$	polvo
-1	0	$e^{Ht}$	constante cosmológica
-1/3	2	$t$	curvatura espacial

donde  $H = \dot{a}/a$  es la función de Hubble. Teníamos también que  $\rho \sim t^{-2}$  para todos los tipos de materia con  $\omega \neq -1$  y  $H^2 \sim \rho$ , que nos dice que  $H^{-1}$  es la edad del universo.

### 21.1 Parámetros de Densidad

**Definición** (Parámetro de Densidad). Sea  $\rho_i$  la densidad del  $i$ -ésimo tipo de materia, donde  $i = 1, \dots, N$  siendo  $N$  el número de tipos de materia que estamos considerando. Definimos entonces, para cualquier tipo de materia no constante cosmológica o de curvatura espacial, el **parámetro de densidad**

$$\Omega_i := \frac{8\pi G_N}{3} \frac{\rho_i}{H^2}.$$

Para el tipo de materia constante cosmológica definimos

$$\Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2},$$

y para la curvatura espacial definimos

$$\Omega_\kappa := -\frac{\kappa}{H^2 a}.$$

*Observación 21.1.1.* Al Dr. Schuller le gusta referirse a las  $\Omega_i$ s como los parámetros de densidad mientras que a los  $\Omega_\kappa$  un parámetro de densidad "falso". La razón es que este tipo de

densidad no ha surgido de alguna contribución de la materia a la ecuación de Einstein, sino que surge más bien al decir "qué tipo de materia necesitaríamos para simular los efectos de  $\kappa$ ?" De forma similar podríamos denominar a  $\Lambda$  un parámetro de densidad pseudo-falsa, ya que entra en la acción y elegimos verlo como un tipo de materia en lugar de una curvatura. Con esta idea en mente, definiremos  $N$  para incluir la materia de tipo constante cosmológica, pero no la de tipo  $\kappa$ .

Utilizando la función de Hubble y los parámetros de densidad, las ecuaciones de Friedmann y de aceleración nos dan

$$\Omega_\kappa + \sum_{i=1}^N \Omega_i = 1, \quad \text{y} \quad H^{-2} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (1 + 3\omega_i) \Omega_i,$$

respectivamente.

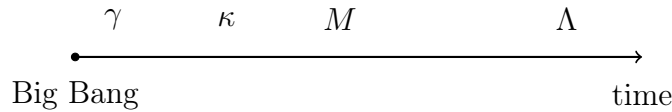
## 21.2 Materia Dominante en Varias Épocas

*Terminología.* Vamos a usar  $\gamma$  para designar la materia de radiación y  $M$  para la materia de polvo, p.ej.  $n_\gamma = 4$  y  $n_M = 3$ .

Utilizando la terminología anterior junto con la tabla del principio de esta clase, así como el resultado  $\rho_i \sim a^{-n(\omega_i)}$ , que también es válida para la materia  $\kappa$ , concluimos que

$$\Omega_\Lambda \sim a^2 \Omega_\kappa \sim a^3 \Omega_M \sim a^4 \Omega_\gamma.$$

Esta es una observación importante y nos permite leer qué tipos de materia dominaron en qué épocas del universo. Un universo en expansión es uno con  $H > 0$ , que corresponde a  $a(t_2) > a(t_1)$  para  $t_2 > t_1$ . Vemos, por tanto, que en épocas posteriores los tipos de materia de la izquierda son cada vez más dominantes y, a la inversa, en épocas tempranas los de la derecha son más dominantes.



Nótese que este resultado proviene de la teoría, no es algo que hayamos propuesto como modelo. Es decir, dados nuestros supuestos, la teoría nos dice qué tipos de materia dominan en qué épocas.

## 21.3 Un universo tardío más realista

Ahora queremos empezar a tener en cuenta la existencia de múltiples tipos de materia en el universo al mismo tiempo. Empecemos por considerar el ejemplo en el que tenemos  $\Omega_M$ ,  $\Omega_{\kappa}$  y  $\Omega_{\Lambda}$ . Podemos utilizar la ecuación de Friedmann para expresar  $\Omega_{\kappa} = 1 - \Omega_M - \Omega_{\Lambda}$ , por lo que el espacio de parámetros de nuestro problema es bidimensional, es decir,  $(\Omega_M, \Omega_{\Lambda})$ .

Queremos trazar este espacio de parámetros, pero vale la pena obtener algunos resultados con el fin de clasificar las diferentes regiones de la trama.

- (i) Hemos visto que  $\kappa$  puede ser positivo, negativo o cero, así que vamos a intentar clasificar estas regiones. Recordemos que  $\Omega_\kappa \sim \kappa$  y por tanto si  $\kappa = 0$ ,  $\Omega_\kappa = 0$ . La ecuación de Friedmann nos dice entonces que esto corresponde a

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M.$$

Por el mismo método obtenemos  $\Omega_\Lambda > 1 - \Omega_M$  para  $\kappa > 0$  y de forma similar para  $\kappa < 0$ .

- (ii) Consideremos ahora la ecuación de la aceleración:

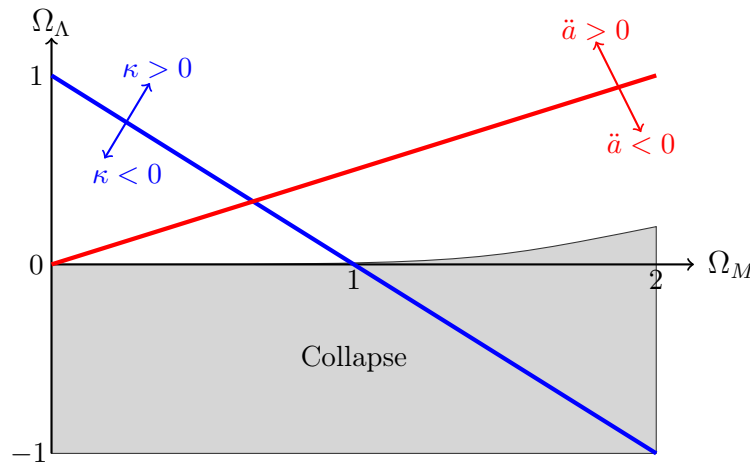
$$H^{-2} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (1 + 3\omega_i) \Omega_i.$$

Sabemos que  $H$  y  $a$  son ambos positivos, por lo que el signo de la mano izquierda sólo depende del signo de  $\ddot{a}$ . Pensamos en esto físicamente como la aceleración de la expansión del universo, por ejemplo,  $\ddot{a} > 0$  corresponde a una expansión acelerada. Utilizando  $\omega_M = 0$  y  $\omega_\Lambda = -1$  obtenemos

$$\Omega_\Lambda = \frac{1}{2} \Omega_M$$

para  $\ddot{a} = 0$ . Obtenemos resultados análogos para  $\ddot{a} > 0$  y  $\ddot{a} < 0$ .

- (iii) Ahora vamos a considerar el colapso frente a la expansión eterna. Es decir, queremos plantear la cuestión de si existe un giro máximo en  $a(t)$ . Formulamos esto matemáticamente cómo buscar un  $t^* \in \mathbb{R}_0^+$  tal que  $\dot{a} = 0$  y  $\ddot{a} < 0$ . Se puede calcular analíticamente la expresión del punto de inflexión (en el sentido de la línea que separa el colapso de la expansión eterna), pero es bastante complicado. Nos limitaremos a trazar su forma en el gráfico siguiente.



La observación experimental nos dice que  $\Omega_{\text{Lambda}} = 0,7$  y  $\Omega_M = 0,3$ , de lo que se concluye (hasta la incertidumbre del experimento) que  $\kappa = 0$ , es decir, que el universo es una geometría plana. También resulta que el 30% de curvatura generado por la materia se divide

a su vez en materia del modelo estándar, que es sólo 5%, y la llamada *materia oscura*, que es el 25% restante. Así que vemos, de nuevo asumiendo que todo lo que hemos hecho es cierto y válido, que el modelo estándar de la física sólo constituye el 5% de toda la materia *necesaria* en el universo para explicar nuestras observaciones. Esta es una de las principales fuerzas motrices de la investigación en cosmología: ¿qué es esta otra materia?

## 22 | Agujeros Negros

Queremos estudiar la solución de Schwarzschild de las ecuaciones de Einstein. Se trata de una solución de vacío con la métrica en la carta de Schwarzschild, cuyas coordenadas son  $(t, r, \theta, \varphi)$ , dadas por

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt \otimes dt - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr \otimes dr - r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi),$$

donde  $m = G_{NM}$  siendo  $M$  la masa del objeto (en este caso el agujero negro).

Observación 22.0.1. Téngase en cuenta que el Dr. Schuller ha vuelto a utilizar la firma  $(+, -, -, -)$  aquí. Seguiré esta convención en estas notas.

Notación. Los dos últimos términos de la expresión anterior suelen agruparse en uno solo y definimos

$$d\Omega \otimes d\Omega = r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi).$$

Esta notación es muy popular en los libros de texto, etc., ya que aligera la misma, y como veremos, son principalmente los términos  $dt \otimes dt$  y  $dr \otimes dr$  los que nos interesan.

La expresión anterior es, obviamente, sólo para las coordenadas de Schwarzschild, pero la propia métrica puede expresarse, por supuesto, en cualquier carta. Podemos pensar que los rangos de las coordenadas de Schwarzschild son  $t(-\infty, \infty)$ ,  $r(0, \infty)$ ,  $\theta(0, \pi)$  y  $\varphi(0, 2\pi)$ . Sin embargo, después de prestar más atención a la métrica anterior observamos un problema inmediato: ¿qué ocurre en  $r = 2m$ ? El término  $dt \otimes dt$  llega a cero, lo que ya es bastante malo, pero además de eso, el tiempo  $dr \otimes dr$  diverge! Por lo tanto, debemos eliminar este punto de nuestro dominio, es decir,  $r \in (0, 2m) \cup (2m, \infty)$ , donde el punto denota el hecho de que la unión es disjunta. Entonces tenemos que hacer la pregunta acerca de lo que realmente sucede en  $r = 2m$ ?

La siguiente pregunta que debemos hacer es "¿hay algo en el mundo real más allá de los puntos  $t \rightarrow \pm\infty$ ?" Esta pregunta parece una tontería, como qué hay más allá de  $\pm\infty$ , pero debemos recordar que  $t : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^4$  es un mapa gráfico y no necesitamos cubrir todo  $\mathcal{M}$  con él. Es decir, podemos parametrizar  $t$  de forma que un volumen finito de  $\mathcal{M}$  se mapee a un volumen infinito en  $\mathbb{R}^4$ . Podemos hacer una pregunta similar sobre  $r \rightarrow \infty$ .

La comprensión de estas cuestiones proviene de dar un paso atrás y no mirar la expresión anterior en sí misma, sino mirar los objetos objetivo, es decir, las geodésicas.

## 22.1 Geodésicas Radiales Nulas

Consideremos las geodésicas nulas<sup>1</sup> en el espacio de Schwarzschild. La acción es

$$S[\gamma] = \int d\lambda \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right].$$

Halleemos primero la ecuación de movimiento  $t$ , es decir, variar con respecto a  $\delta t$ . Tenemos

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k,$$

para una constante  $k$ .

**Definición** (Geodésicas Radiales). Definimos una **geodésica radial** como una que "sigue a  $r$ ". En otras palabras, establecemos  $\theta = \theta_0$  y  $\varphi = \varphi_0$ , para unas constantes  $\theta_0$  y  $\varphi_0$ .

### Ejercicio

Utilizar la ecuación temporal del movimiento, la condición nula y la condición radial para demostrar que podemos utilizar  $r$  como parámetro afín.

*Pista: Mostrar que  $r = \pm k\lambda$  y luego argumentar por qué podemos considerar  $r$  como un parámetro afín. (Si necesitan ayuda, el Dr. Schuller explica este argumento en el vídeo).*

Expresamos el resultado del ejercicio anterior como  $\tilde{t}(r) = t(\pm k\lambda)$ . Consideremos cada caso:

- (i) Consideremos primero  $\tilde{t}_+(r) = t(k\lambda)$ . La regla de la cadena nos da

$$\frac{d\tilde{t}_+}{dr} = \frac{d\tilde{t}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \frac{k}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)k} = \frac{r}{r - 2m}.$$

Integrando esto<sup>2</sup>

$$\tilde{t}_+(r) = r + 2m \ln |r - 2m| + \text{constante}.$$

Estas son las geodésicas nulas **salientes**.

- (ii) Consideremos ahora  $\tilde{t}_-(r) = t(-k\lambda)$ . Un método similar al de arriba nos da

$$\tilde{t}_-(r) = -r - 2m \ln |r - 2m| + \text{constante}.$$

Estas son las geodésicas nulas **entrantes**.

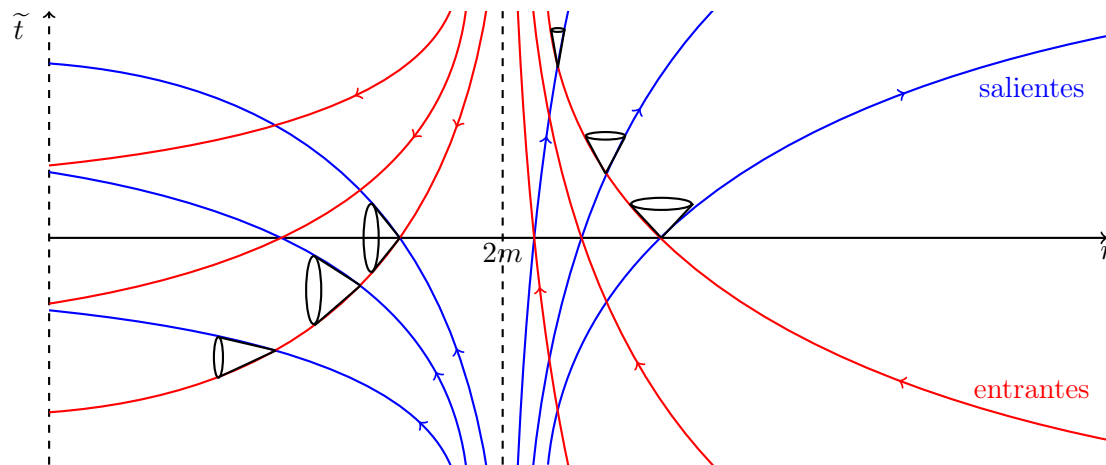
Para ver lo que ocurre, tracemos las geodésicas salientes y entrantes.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Recordemos que esto simplemente significa  $g(v_\gamma, v_\gamma) = 0$ , que corresponde a las líneas del mundo de partículas masivas.

<sup>2</sup>Esta integral no es la más fácil de hacer, pero diferenciando el resultado se demuestra que es cierto.

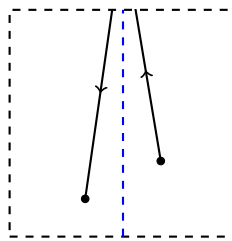
<sup>3</sup>Este diagrama fue un dolor para dibujar, así que para cualquier lector: Espero que les guste.





Este diagrama puede ser realmente muy engañoso. En primer lugar, los conos de luz parecen cerrarse, lo cual es muy extraño, y luego, de repente, surgen inclinados sobre su lado en la región  $r < 2m$ . Este problema proviene del hecho de que estamos dibujando decidiendo el aspecto de los conos de luz basándonos en las geodésicas graficadas, y en realidad no es un problema en absoluto.<sup>4</sup>

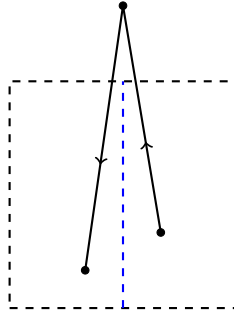
El siguiente problema es que parece que una geodésica que comienza en la región  $r > 2m$  no puede llegar a la región  $r < 2m$ . Esto parece una completa locura, porque ¿no hemos oído antes que un agujero negro de Schwarzschild es un objeto denso que tiene un horizonte de sucesos en  $r = 2m$ . Entonces, ¿no debería pasar una geodésica por esta línea? La respuesta es obviamente "sí" y el problema es de nuevo un artefacto en la elección de coordenadas, concretamente el rango de  $t$ . Para ver por qué, imaginemos que el mapa de Londres<sup>5</sup> en un gráfico de volumen infinito. Pensemos en alguien que vive en Londres pero trabaja fuera de la capital: por la mañana sale de casa para ir a trabajar y, después del trabajo, decide volver a Londres para comer con un amigo. Si trazáramos su trayectoria en nuestro gráfico, tendría el siguiente aspecto:



Es evidente que no es cierto que esta persona no haya cruzado la línea azul, simplemente no está incluida en el gráfico. En otras palabras, esperamos que el camino sea realmente como el siguiente:

<sup>4</sup>He escrito mis propias ideas sobre lo que creo que realmente está ocurriendo aquí y lo he subido a la página de mi blog. Esas notas contienen muchos errores que tengo que volver a corregir, pero aún así espero que el lector interesado encuentre una lectura agradable.

<sup>5</sup>El Dr. Schuller utiliza Linz, pero yo soy británico, así que utilizaré Londres.



¿Podría ocurrir lo mismo con nuestra imagen de Schwarzschild? La respuesta es "sí", y explicaremos cómo en la siguiente sección.

## 22.2 Eddington-Finkelstein

La idea es cambiar las coordenadas de tal manera que, en nuestras nuevas coordenadas las geodésicas nulas *entrantes* aparezcan como líneas rectas de pendiente  $-1$ . Esto se consigue con la coordenada

$$\bar{t}_{\pm}(t, r, \theta, \varphi) := \tilde{t}_{\pm} + 2m \ln |r - 2m|.$$

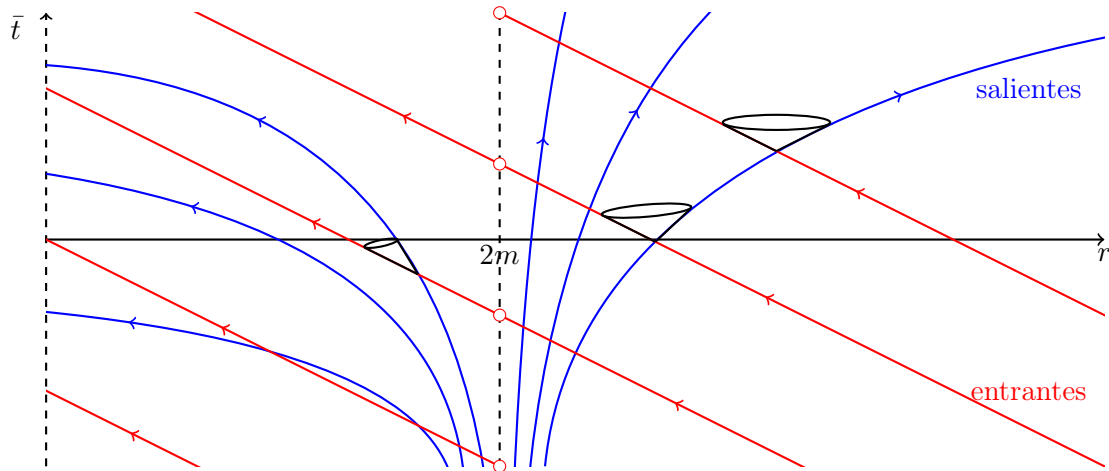
Rearreglando esto para  $\tilde{t}_{-}$  e insertándolo en la expresión para  $\tilde{t}_{-}(r)$  se obtiene

$$\bar{t}_{-} = -r + \text{constante},$$

que es exactamente lo que queríamos. También obtenemos

$$\bar{t}_{+} = r + 4m \ln |r - 2m| + \text{constante},$$

que tendrá el mismo tipo de forma que antes (pero ligeramente escalada). Por lo tanto, el gráfico se convierte en:

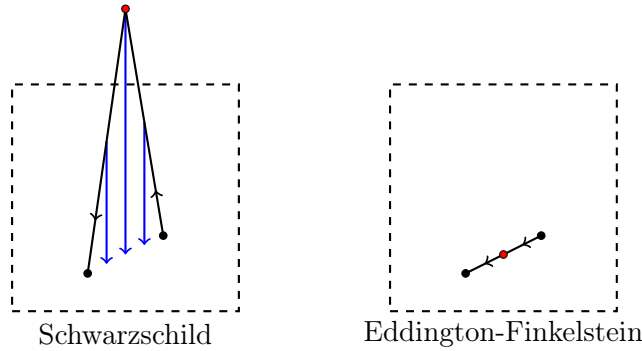


Nótese que los puntos a lo largo de  $r = 2m$  siguen sin formar parte de nuestra carta  $(U, x)$  y por tanto deben ser excluidos. Sin embargo, en este punto se hace evidente que no hay nada malo con estos puntos y podemos simplemente definir un nuevo dominio gráfico

$V := U \cup \{r = 2m\}$ . Esto entonces da el mismo diagrama que antes pero sin los círculos blancos.

No lo vamos a dibujar de nuevo sólo por el bien de la eliminación de los círculos, sin embargo, vale la pena señalar que en esta nueva carta podríamos trazar los conos de línea en  $r = 2m$ . Todos los conos a lo largo de esta línea tendrían su lado derecho vertical. Esta es la condición de que el  $r = 2m$  es el horizonte y corresponde al punto de no retorno. Es decir, recordando que la línea del mundo de un observador masivo debe tener sus vectores tangentes dentro del cono de luz, en  $r = 2m$  un observador ya no puede alejarse del agujero negro y está destinado a encontrarse con la singularidad.

Observación 22.2.1. Podemos pensar en la transformación de coordenadas Eddington-Finkelstein como una que "tira" de los puntos hacia abajo. Utilizando como ejemplo a nuestro viajero de Londres, lo vemos como el siguiente diagrama: (las flechas azules representan lo que hace esa transformación)



Observación 22.2.2. **Nota para mí:** Tal vez incluir un comentario sobre la extensión máxima aquí. Sólo a grandes rasgos lo que significa, etc.

Calculemos ahora la métrica de Schwarzschild  $g$  en coordenadas Eddington-Finkelstein. Nuestra transformación de coordenadas viene dada por

$$\begin{aligned}\bar{t}(r, t, \theta, \varphi) &= t + 2m \ln |r - 2m| \\ \bar{r}(r, t, \theta, \varphi) &= r \\ \bar{\theta}(r, t, \theta, \varphi) &= \theta \\ \bar{\varphi}(r, t, \theta, \varphi) &= \varphi.\end{aligned}$$

Si designamos las coordenadas de Schwarzschild por  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  y las coordenadas de Eddington-Finkelstein por  $(y^0, y^1, y^2, y^3)$  entonces nuestro problema es encontrar

$$g_{(y)ab} = \frac{\partial x^m}{\partial y^a} \frac{\partial x^n}{\partial y^b} g_{(x)mn}.$$

Parece que tenemos que invertir las transformaciones anteriores para obtener  $x^i(y)$ , sin embargo hemos demostrado en el tutorial 5 que

$$\delta_n^m = \left( \frac{\partial x^m}{\partial y^a} \right) \left( \frac{\partial y^a}{\partial x^n} \right) \implies \left( \frac{\partial y^a}{\partial x^m} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial x^m}{\partial y^a} \right),$$

y así podemos usar nuestras ecuaciones de transformación anteriores y luego invertir la matriz de resultados.<sup>6</sup> Tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^a}{\partial x^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2m}{r-2m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \frac{\partial x^m}{\partial y^a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2m}{r-2m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando el resultado, y eliminando las barras de  $r, \theta$  y  $\phi$ , obtenemos

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t} \otimes d\bar{t} - \frac{2m}{r} (d\bar{t} \otimes dr + dr \otimes d\bar{t}) - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr \otimes dr - d\Omega \otimes d\Omega.$$

### Ejercicio

Probar el resultado anterior.

*Pista: Puede hacerse usando la transformación anterior (que se hace en el vídeo) o se puede usar la definición de la derivada exterior  $d$ . Los dos métodos son, por supuesto, equivalentes.*

## 22.3 Kruskal-Szekeres

Como hemos visto, tanto en las coordenadas de Schwarzschild como en las de Eddington-Finkelstein, los conos de luz se aplastan o giran y, aunque esto puede darnos una buena idea, podemos hacer otras transformaciones de coordenadas de forma que las geodésicas salientes también se conviertan en líneas rectas de pendiente  $+1$ . Al hacerlo, nuestros conos de luz se situarán todos en vertical y formarán siempre un ángulo de 90 grados. Por supuesto, esto se consigue a costa de que las propias coordenadas tengan un aspecto un poco extraño, pero esa es la contrapartida. Estas coordenadas se conocen como coordenadas de Kruskal-Szekeres. La transformación de coordenadas viene dada por: para  $r > 2m$

$$\begin{aligned} \bar{t}(t, r, \theta, \varphi) &:= \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ \bar{r}(t, r, \theta, \varphi) &:= \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{aligned}$$

y para  $r < 2m$

$$\begin{aligned} \bar{t}(t, r, \theta, \varphi) &:= \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ \bar{r}(t, r, \theta, \varphi) &:= \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{aligned}$$

y  $\theta$  y  $\varphi$  quedan invariables.

<sup>6</sup>Téngase en cuenta que esto no es lo mismo que simplemente hacer el recíproco de la fracción, ya que si la matriz no es diagonal los elementos inversos no son sólo los recíprocos.

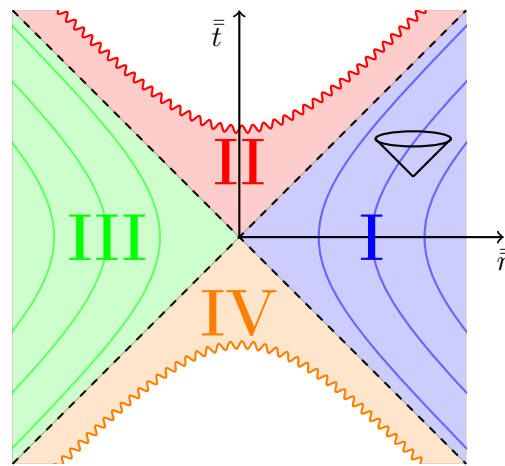
## Ejercicio

Mostrar que las coordenadas Kruskal-Szekeres nos dicen

$$\bar{t}^2 - \bar{r}^2 = \begin{cases} -k^2 & r > 2m \\ \ell^2 & r < 2m \end{cases}$$

para  $k, \ell \in \mathbb{R}$ .

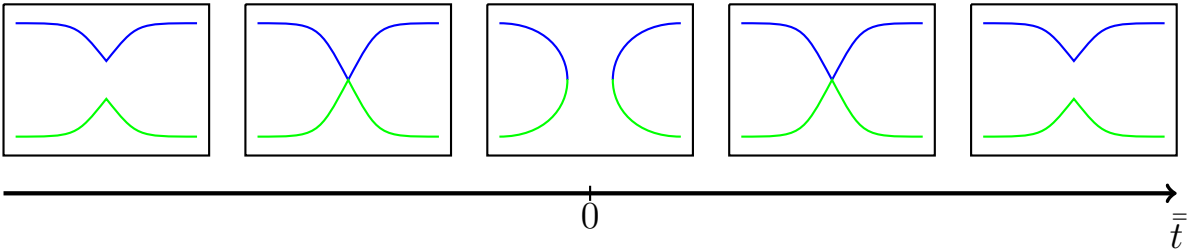
Del ejercicio anterior vemos que el diagrama está formado por conjuntos de hipérbolas. Lo verdaderamente sorprendente de estas soluciones es que admiten nuevas regiones en nuestro espaciotiempo, como muestra el siguiente diagrama.



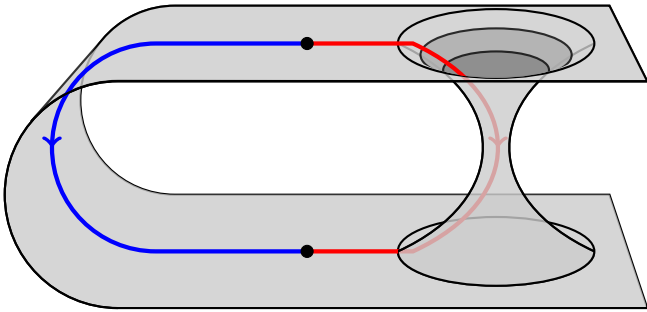
Obtenemos cuatro regiones: la región I es nuestro universo, y las líneas de  $r$  constante son las hipérbolas dibujadas; la región II es el agujero negro con la línea de la serpiente que es la singularidad, y sólo la región sombreada forma parte del espaciotiempo; la región III es completamente nueva y representa otro universo, causalmente desconectado, donde de nuevo las líneas de  $r$  constante son las hipérbolas dibujadas; la región IV es lo que llamamos un *agujero blanco*, ya que todas las geodésicas casuales (es decir, las partículas masivas y sin masa) deben salir de él y entrar en la región I o en la región III. En el interior del agujero negro/blanco las hipérbolas correspondientes representan líneas de  $t$  constante.

Los conos de luz se sitúan "en posición vertical" en todas las partes del diagrama, lo que nos permite observar que las líneas discontinuas representan los horizontes de sucesos del agujero negro y del agujero blanco; cualquier geodésica que pase la línea discontinua entre las regiones I y II está condenada a encontrarse con la singularidad.

Después de superar el shock inmediato de otro universo y un agujero blanco, se plantea una pregunta vital: "¿qué ocurre en el origen (es decir, donde se cruzan las líneas discontinuas)?" La respuesta a esta pregunta es bastante complicada, pero básicamente consiste en que hay un cambio de topología. Si consideramos cortes espaciales que se mueven hacia arriba en el diagrama, obtenemos algo como la siguiente imagen: suprimiendo las direcciones  $\theta$  y  $\varphi$ , obtenemos



La estructura que se forma en  $\bar{t} = 0$  es la llamada *agujero de gusano* y corresponde a un "portal" entre las regiones I y III. Los puntos en los que las líneas azules se vuelven verdes se conocen como la *garganta* del agujero de gusano<sup>7</sup>. El agujero de gusano corresponde a un corte espacial y, por tanto, no es realmente algo por lo que pueda viajar un observador, pero es una idea increíblemente interesante, y llevó a Einstein y Rosen a intentar proponer un "puente" de este tipo entre puntos del espaciotiempo en una variedad causalmente conectada. El resultado de esto es el llamado *puente de Einstein-Rosen*.



**22.4 Otros Tipos De Agujero Negro**

**Teorema 22.4.1** (Sin Pelo). *Todas las soluciones de los agujeros negros a las ecuaciones de Einstein y de Maxwell pueden caracterizarse completamente por su **masa**, **momento angular** y **carga eléctrica**.*

Del teorema anterior se desprende que podemos tener cuatro tipos diferentes de agujero negro, resumidos en la siguiente tabla

Nombre	Masa	Momento Angular	Carga Eléctrica
Schwarzschild	✓	✗	✗
Kerr	✓	✓	✗
Reissner–Nordström	✓	✗	✓
Kerr–Newman	✓	✓	✓

En esta conferencia sólo hemos hablado del agujero negro de Schwarzschild, pero no hemos mencionado ninguno de los otros tres. En estas notas no discutiremos los otros agujeros

<sup>7</sup>El nombre proviene de la idea de que si reinsertamos  $\theta$  obtendríamos aquí una estructura parecida a un tubo y se vería como una garganta que conecta dos espacios. Véase el diagrama del puente de Einstein-Rosen.

negros con gran detalle, pero para destacar algunos resultados bastante sorprendentes haremos algunos breves comentarios sobre el agujero negro de Kerr.

Hemos visto anteriormente que el agujero negro de Schwarzschild da lugar a un punto del espaciotiempo que debe ser eliminado, es decir, la singularidad. Desde el punto de vista físico, imaginamos una estrella masiva con simetría esférica que colapsa en un *punto singular* en el centro. Este punto de singularidad debe, por lo tanto, contener la información sobre el agujero negro.<sup>8</sup> Un agujero negro de Kerr, sin embargo, es un agujero negro eléctricamente neutro y en rotación. Si juntamos esto con el hecho de que la relatividad general es una teoría clásica, está claro que no podemos tener un único punto para nuestra singularidad. Es decir, la singularidad debe contener información sobre el momento angular del agujero negro, pero clásicamente un único punto no puede tener momento angular. La siguiente mejor opción es considerar un anillo infinitamente delgado de radio no evanescente. Esto es lo que se obtiene para un agujero negro de Kerr, y el resultado se conoce como una **singularidad anular** o la palabra compuesta: una **"anillaridad"**.

*Afirmación 22.4.2.* Un observador puede evitar una singularidad anular y atravesar el disco delimitado por ella y emerger en lo que algunos llaman un *antiverso*.

No comprobamos la afirmación anterior.

#### 22.4.1 Horizontes de sucesos & Superficies de Corrimiento al Rojo Infinito

Además de exhibir una singularidad anular, los agujeros negros de Kerr también poseen otra idea nueva. Para entenderla un poco mejor, echemos otro vistazo a lo que ocurre con la métrica de Schwarzschild (en coordenadas de Schwarzschild) a  $r = 2m$ . En concreto, consideremos las componentes  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$ :

$$g_{tt} = g(\partial_t, \partial_t) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad \text{y} \quad g_{rr} = g(\partial_r, \partial_r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}.$$

Vemos enseguida que para  $r > 2m$ ,  $g_{tt} > 0$  y  $g_{rr} < 0$ , mientras que para  $r < 2m$ ,  $g_{tt} < 0$  y  $g_{rr} > 0$ . Por tanto, el punto  $r = 2m$  parece corresponder a un cambio de signo en estas componentes. Podemos expresar esto como la afirmación "a medida que pasamos de  $r > 2m$  a  $r < 2m$  el campo vectorial  $\partial_t$  de tipo temporal se convierte en espacial, mientras que el campo vectorial  $\partial_r$  de tipo espacial se convierte en temporal".

Ahora bien, estas dos condiciones en sí mismas no tienen por qué estar relacionadas, es decir, el hecho de que  $\partial_t$  se vuelva espacial no está fundamentalmente relacionado con que  $\partial_r$  se vuelva temporal. Es cierto, sin embargo, que el *algo* debe volverse temporal, de lo contrario la firma de nuestra métrica cambiaría, es decir, acabaríamos con  $(+, +, +, +)$ , en nuestra convención, pero  $\partial_r$  no es la única opción, también tenemos  $\partial_\theta$  y  $\partial_{\varphi}$ . Antes de pasar a discutir cuándo uno de estos dos últimos puede llegar a ser semejante al tiempo, tratemos primero de averiguar qué significan físicamente nuestras dos condiciones.

Primero consideremos que  $\partial_r$  se convierte en tiempo. Recordemos que el interior del cono de luz del futuro daba el posible futuro de un observador masivo. Utilizamos la palabra

---

<sup>8</sup>Disclaimer: No estoy seguro de lo correcto que sea hacer esta afirmación. No me gusta demasiado atribuir información a la ausencia de un punto en el espaciotiempo, pero este argumento facilita la explicación de la siguiente parte, así que asumiremos que está bien.

"futuro" ya que el reloj que lleva este observador aumentará en el tiempo a medida que siga las geodésicas temporales. Esto se dio como una definición y, por lo tanto, siempre se mantendrá, independientemente de qué campo vectorial de coordenadas es temporal y cuál es espacial. Sin embargo, esta última distinción tiene un efecto en nuestras interacciones con observadores externos. A grandes rasgos, la proyección de nuestra velocidad es no evanescente sólo para los campos vectoriales temporales, por lo que nuestro futuro no puede ser ortogonal a estas direcciones. Cuanto más "central" en el cono sea el campo vectorial temporal, más determinará nuestro futuro.

Esto puede sonar un poco raro, pero se entiende fácilmente si se considera la dilatación del tiempo en la relatividad especial. El espacio-tiempo de la relatividad especial es el espacio plano de Minkowski y todos los conos están en posición vertical y forman 90 grados. Consideremos ahora la carta con mapas gráficos  $(t, x, y, z)$ . Un observador estacionario  $(\gamma, e)$  en este marco seguirá una geodésica cuyos vectores tangentes son curvas integrales del campo vectorial  $\partial_t$ . Podemos elegir parametrizar esta curva de forma que  $g(e^0, \partial_t) = 1$ , es decir, el reloj que lleva este observador coincide con el tiempo de las coordenadas  $t$ .

Consideremos ahora otro observador  $(\delta, f)$  que se mueve respecto al primero. Seguirá una geodésica que es *no* una curva integral del campo vectorial  $\partial_t$ . Este marco de observadores obedecerá  $0 < g(f^0, \partial_t) < 1$ , donde el valor en el rango depende de la velocidad de  $\delta$ . A esto nos referimos más arriba con lo de tener una proyección no evanescente sobre nuestro campo vectorial temporal.

Ahora, para el observador estacionario, ambos envejecen, ya que ambos tienen una proyección no evanescente en la dirección  $e^0$ ,<sup>9</sup> Sin embargo, el segundo observador parece envejecer más lentamente, como  $g(f^0, \partial_t) < g(e^0, \partial_t)$ .

Teniendo en cuenta el apartado de la relatividad especial, podemos ver que la condición de que  $\partial_r$  se convierta en un vector temporal nos dice que, desde la perspectiva de un observador estacionario respecto a las coordenadas de Schwarzschild, el observador *debe* moverse con alguna proyección a lo largo del eje  $\partial_r$ . ¿Pero qué es lo que está estacionario respecto a las coordenadas de Schwarzschild? Pues el agujero negro, por supuesto. Así que vemos que un observador en  $r < 2m$  debe moverse a lo largo de la dirección radial. La pregunta es "¿en qué dirección?". De nuevo esto puede parecer una tontería, pero tiene mucho más sentido cuando recordamos que en el caso de la relatividad especial, siempre nos movemos hacia arriba en el eje  $t$  y no hacia atrás en el pasado.

No trataremos esto con demasiada profundidad aquí<sup>10</sup> (ya que estamos siendo un poco tejidos a mano), pero la idea general es que cuando  $\partial_r$  se convierte en tiempo, en realidad apunta al cono de luz pasado, y por lo tanto nuestro futuro está determinado por el movimiento *hacia* el agujero negro. Así que hemos descubierto que el hecho de que  $\partial_r$  se convierta en un tiempo similar corresponde a un horizonte de sucesos.

¿Qué pasa con que  $\partial_t$  se convierta en espacial, de qué se trata? Para ahorrar espacio, no discutiremos exactamente de dónde viene esto, pero resulta que esto corresponde a una llamada **superficie de corrimiento al rojo infinito**. El nombre proviene de la idea de que, *para un observador en  $r \rightarrow \infty$* , la luz emitida en los puntos en los que  $\partial_t$  se convierte en temporal se desplaza tanto hacia el rojo que realmente "desaparece". Esta afirmación es muy

<sup>9</sup>Debemos tener cuidado aquí porque  $e^0$  sólo se define a lo largo de  $\gamma$ , pero debe ser relativamente claro lo que queremos decir.

<sup>10</sup>Trato esto con más detalle en las notas que hice sobre los conos de luz y los horizontes de sucesos, que están disponibles en el sitio de mi blog



extraña, ya que, en primer lugar, sólo es cierta para un observador infinitamente alejado (de hecho, un observador a una distancia finita podrá detectar la luz, aunque esté muy desplazada al rojo) y, en segundo lugar, la idea de desplazar algo completamente al rojo es extraña. Por eso no presentamos aquí el origen matemático de este fenómeno.

Sin embargo, existe una interpretación física mucho más agradable (en mi opinión) de lo que ocurre en una superficie de desplazamiento al rojo infinito. Como hemos explicado, para que  $\partial_t$  se convierta en espacial, uno de los campos vectoriales espaciales debe convertirse en temporal. Argumentamos que esto, a su vez, provoca un movimiento relativo entre el observador y el agujero negro a lo largo (o en contra) de la dirección de este campo vectorial. Esta es una idea mucho más bonita, y es la que utilizaremos.

*Observación 22.4.3.* De nuestros argumentos anteriores se deduce que para alcanzar un horizonte de sucesos un observador debe pasar por una superficie de corrimiento al rojo infinito. Es decir, si  $\partial_r$  se convierte en temporal,  $\partial_t$  tiene que convertirse en espacial antes o al mismo tiempo.

*Observación 22.4.4.* Es importante no confundir la coordenada  $t$  con el tiempo medido en el reloj de un observador. Dentro de una superficie de corrimiento al rojo infinito  $\partial_t$  es espacial, por lo que podemos movernos "hacia abajo". Si tomáramos esto como tiempo, entonces sería la afirmación de que podemos viajar hacia atrás en el tiempo. Si esto fuera una verdadera inversión del tiempo, viajar en esta dirección nos llevaría hacia atrás y fuera de la superficie de corrimiento al rojo infinito. Esto no es lo que ocurre en absoluto, y se ve fácilmente por el hecho de que medimos el tiempo a través del reloj que llevamos. Lo que sí dice lo anterior es que, para un observador estacionario respecto al agujero negro, podemos viajar hacia atrás en el tiempo, ya que podemos movernos a lo largo de una geodésica que tiene proyección positiva a lo largo de  $-\partial_t$ .

### 22.4.2 Ergoregión

La métrica para el agujero negro de Kerr no es especialmente perspicaz de ver, por lo que no la presentamos aquí, sino que nos limitamos a resumir los resultados.

Resulta que, a diferencia del agujero negro de Schwarzschild, el horizonte de sucesos y la superficie de desplazamiento al rojo infinito para el agujero negro de Kerr no coinciden. Es decir,  $r_{IRS} > r_{EH}$ , donde  $r_{IRS}$  ( $r_{EH}$ , respectivamente) es el valor de  $r$  de la superficie de desplazamiento al rojo infinito (horizonte de sucesos, respectivamente).

**Definición** (Ergoregión). La región  $r_{EH} < r < r_{IRS}$  es denominada la **ergoregión** (o **ergoesfera**).

La pregunta obvia que hay que hacerse es "¿cuál es el campo vectorial de tiempo en la ergoregión?". La respuesta a esa pregunta es el sentido de giro,  $\partial_{varphi}$ . Resulta que el  $\partial_{varphi}$  se encuentra en el cono del futuro y, por tanto, un observador en la ergoregión *debe* rotar con el agujero negro.

*Observación 22.4.5.* Existe una idea interesante para extraer energía de la ergoregión de un agujero negro de Kerr conocida como el proceso **Penrose**. No lo discutiremos aquí, pero se anima a los lectores a buscarlo ya que es bastante interesante.

**22.4.3 Horizontes de Sucesos Múltiples**

También resulta que los agujeros negros que no son de Schwarzschild tienen todos dos horizontes de sucesos y superficies de corrimiento al rojo infinitas. La presencia del horizonte de sucesos interior significa que se puede atravesar un agujero negro sin encontrarse con la singularidad y ¡puede emerger en otro universo! No discutimos esto con más detalle aquí, pero lo destacamos en los diagramas de Penrose de la próxima sesión.

## 23 | Diagramas de Penrose

¿No sería agradable poder dibujar un diagrama informativo de un espaciotiempo *entero* en una porción finita de papel? Para algunos espaciotiempo esto es posible y los diagramas resultantes se conocen como diagramas de **Penrose** (o Penrose-Carter). Para que los diagramas sean útiles, tendremos que transigir en una serie de cuestiones, pero *no* transigiremos en la agradable propiedad de que las geodésicas nulas tengan una pendiente de  $\pm 1$ , es decir, que los conos de luz se mantengan erguidos y formen un ángulo de 90 grados en todas partes.

### 23.1 Receta para construir un diagrama

La "receta" es como sigue:

- (i) Comenzar con una métrica del espacio-tiempo en algún gráfico, y *téngase en cuenta cuidadosamente los rangos de coordenadas*.
- (ii) Encontrar coordenadas tales que dos coordenadas previamente no compactas sean sustituidas por dos coordenadas nulas (posiblemente todavía no compactas), que etiquetamos como  $v$  y  $w$ .
- (iii) Compactar las dos coordenadas nulas por separado, es decir, introducir nuevas coordenadas<sup>1</sup>

$$p := \arctan(v), \quad \text{y} \quad q := \arctan(w).$$

Así,  $(p, q)$  tomará valores en (algún subconjunto de)  $(-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2)$ .

- (iv) Definir de nuevo una coordenada temporal y espacial

$$T := p + q, \quad \text{y} \quad X := p - q,$$

teniendo en cuenta de nuevo los rangos.

- (v) Expresar la métrica  $g$  en las coordenadas  $(T, X, \dots)$ , donde  $\dots$  son las coordenadas originales que no hemos cambiado.
- (vi) Si<sup>2</sup> la métrica en esas coordenadas toma la forma

---

<sup>1</sup>No es necesario utilizar  $\arctan$ , sino simplemente cualquier función de compactación.

<sup>2</sup>Puede no ser posible!

$$g = \Omega^{-2}(T, X, \dots) \left[ dT \otimes dT - dX \otimes dX - R(T, X)(d\dots \otimes d\dots) \right].$$

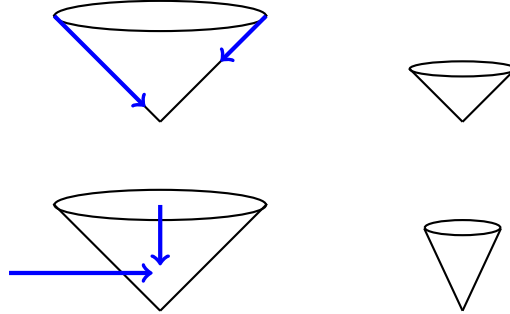
Donde  $d\dots \otimes d\dots$  tiene por objeto indicar las coordenadas restantes en forma de diagonal (p.ej.  $d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi$ ), obtener entonces el diagrama no físico

$$g_{\text{diagram}} = dT \otimes dT - dX \otimes dX,$$

de nuevo observando los rangos.

El resultado anterior parece bastante extraño; esencialmente lo que hemos hecho es convertir todo en lo que parece ser un espacio plano de Minkowski. Pues sí y no. Sí porque queremos que los conos se mantengan erguidos y a 90 grados, pero no porque  $(T, X) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  no es una igualdad: nuestro diagrama es de tamaño finito. Por tanto, podemos pensar que la información del diagrama, y por tanto del espaciotiempo, está contenida en el lugar donde están los límites.

Observación 23.1.1. El paso (ii) de lo anterior es importante, ya que es lo que nos permite preservar los conos. Esto es fácil de ver gráficamente, ya que la compresión a lo largo de coordenadas nulas no cambia los ángulos de los conos, mientras que si hubiéramos utilizado una coordenada temporal y una coordenada espacial, sólo preservaríamos el ángulo si compactáramos de una manera 1 : 1 en todas partes.<sup>3</sup>



Observación 23.1.2. Al ir al paso (vi) parece que hemos "olvidado" el factor  $\Omega^{-2}$  y los términos  $R(T, X)(\dots)$ .

El primero es simplemente un factor de conformación,<sup>4</sup> y los factores de conformación no cambian la forma de las geodésicas nulas. Sin embargo, sí cambiarán la forma de otras (es decir, las geodésicas de tipo temporal y espacial). Enunciamos esto de forma más precisa en la siguiente proposición. Dado que sólo nos interesa perseverar en las geodésicas nulas (es decir, los conos de luz), podemos hacerlo y aceptar simplemente que la forma de las demás cambiará.

El segundo punto lo arreglamos simplemente imaginando que en cada punto de nuestro diagrama adjuntamos un espacio cuya geometría viene dada por los términos  $R(T, X)(\dots)$ . Por eso permitimos que  $R$  sea una función de  $T$  y  $X$  y también por eso lo denominamos  $R$  — podemos pensar vagamente que es el radio de estas geometrías que adjuntamos.

<sup>3</sup>El diagrama de abajo es un poco engañoso: los conos son infinitamente grandes por lo que cuando los dibujamos más pequeños a la derecha sólo queremos decir que la parte azul del cono se ha hecho más pequeña; ambos siguen siendo infinitos en tamaño.

<sup>4</sup>Se puede encontrar mucha más información sobre las transformaciones de conformación en mis notas del curso de Teoría de Cuerdas del Dr. Shiraz Minwalla.

**Proposición 23.1.3.** *Una curva  $\gamma$  es una geodésica nula de  $g$  si y sólo si es una geodésica nula de  $\Omega^2 g$ , donde  $\Omega^2 \in C^\infty(\mathcal{M})$  no es desvaneciente en ninguna parte.*

*Proof.* Sean  ${}^g\nabla$  y  ${}^{\Omega^2 g}\nabla$  las conexiones asociadas a  $g$  y  $\Omega^2 g$ , respectivamente. Sea  $\gamma : (0, 1)\mathcal{M}$  una curva y designemos el campo vectorial tangente a ella por  $X$ . Entonces:

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\gamma$  es una geodésica nula afinamente ("affinely") parametrizada de  $g$ . Es decir,  ${}^g\nabla_X X = 0$ . Consideremos ahora la derivada covariante de  $X$  utilizando  ${}^{\Omega^2 g}\nabla$ :

$$\begin{aligned} \left({}^{\Omega^2 g}\nabla_X X\right)^a &= X^b \frac{\partial}{\partial x^b} X^a + \Omega^2 \Gamma^a_{cb} X^b X^c \\ &= X^b \frac{\partial}{\partial x^b} X^a + \frac{1}{2\Omega^2} g^{ad} [(\Omega^2 g)_{cd,b} + (\Omega^2 g)_{bd,c} - (\Omega^2 g)_{bc,d}] X^b X^c \end{aligned}$$

Consideremos sólo el segundo término,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Omega^2} g^{ad} [(\Omega^2 g)_{cd,b} + (\Omega^2 g)_{bd,c} - (\Omega^2 g)_{cb,d}] X^b X^c &= \frac{1}{2\Omega^2} g^{ad} [2\Omega^2_{,b} g_{cd} - \Omega^2_{,d} g_{bc}] X^b X^c \\ &\quad + \frac{1}{2\Omega^2} \Omega^2 g^{ad} [g_{cd,b} + g_{bd,c} - g_{bc,d}] X^b X^c, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la convención de la suma para obtener los 2 dentro de los primeros corchetes. El segundo término del lado derecho va con el primer término del lado derecho de la primera ecuación para darnos  ${}^g\nabla_X X$ , que hemos supuesto desaparecida, por lo que sólo nos queda

$$\left({}^{\Omega^2 g}\nabla_X X\right)^a = \frac{1}{2\Omega^2} g^{ad} [2\Omega^2_{,b} g_{cd} - \Omega^2_{,d} g_{bc}] X^b X^c.$$

Ahora el segundo término del lado derecho contiene  $g_{bc} X^b X^c = g(X, X) = 0$ , ya que nuestra geodésica es nula, así que sólo nos queda el primer término. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega^2} g^{ad} g_{cd} \Omega^2_{,b} X^b X^c &= \frac{2}{\Omega} \Omega_{,b} X^b X^a \\ &= 2X \langle \ln \Omega \rangle X^a \\ &= A \cdot X^a \end{aligned}$$

donde hemos utilizado  $g^{ad} g_{cd} = \delta^a_c$  y el hecho de que  $X \langle \ln \Omega \rangle \in C^{infy}(\mathcal{M})$  y lo hemos designado por  $A$ . Así que finalmente tenemos

$$\left({}^{\Omega^2 g}\nabla_X X\right)^a = A \cdot X^a.$$

Esta es la ecuación de una geodésica que no ha sido parametrizada afinamente, por lo que no desaparece.

Así que hemos demostrado que es una geodésica. Ahora sólo tenemos que demostrar que es nula. Trivialmente tenemos

$$(\Omega^2 g)(X, X) = \Omega^2 \cdot (g(X, X)) = 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Se trata del mismo cálculo que el anterior, pero realizado a la inversa.

□

*Observación 23.1.4.* Nótese que hemos tenido que utilizar la condición nula para demostrar que teníamos una geodésica de  $\Omega^2$  (es decir, para eliminar el término  $g_{bc}X^bX^c$ ). Es por esta razón que sólo las geodésicas nulas quedan intactas por nuestra transformación conforme, mientras que la forma de nuestras otras geodésicas cambia.

## 23.2 Minkowski

La solución de vacío más simple de las ecuaciones de Einstein es el espacio de Minkowski, que en coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  con  $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $r \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$  y  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , tiene la métrica

$$g = dt \otimes dt - dr \otimes dr - r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi).$$

Nuestras dos coordenadas no compactas son  $t$  y  $r$  y por tanto son éstas las que sustituimos por coordenadas nulas. Definimos <sup>5</sup>

$$v := t + r, \quad \text{y} \quad w = t - r.$$

El rango aquí es  $v, w \in \mathbb{R}$ , pero con la condición  $r = \frac{1}{2}(v - w) > 0$ , por lo que requerimos  $v > w$ . Ahora compactamos:

$$p := \arctan(v), \quad \text{y} \quad q := \arctan(w).$$

Nuestro rango es ahora  $p, q \in (-\pi/2, \pi/2)$  con la condición  $p > q$ . Ahora construimos las nuevas coordenadas temporales y espaciales

$$T := p + q, \quad \text{y} \quad X := p - q.$$

Utilizando  $p = \frac{1}{2}(T + X)$  y  $q = \frac{1}{2}(T - X)$ , los rangos/condición se convierten entonces en

$$-\pi < T + X < \pi, \quad -\pi < T - X < \pi, \quad \text{y} \quad X > 0.$$

Ahora necesitamos expresar nuestra métrica en términos de  $(T, X, \theta, \varphi)$ . Necesitamos obtener expresiones para  $T$  y  $X$  en términos de estas coordenadas. Uniendo los resultados anteriores, tenemos

$$T := \arctan(t + r) + \arctan(t - r), \quad \text{y} \quad X := \arctan(t + r) - \arctan(t - r).$$

En esas condiciones la métrica es

$$g = \sec^2(T + X) \sec^2(T - X) \left[ dT \otimes dT - dX \otimes dX - R(T, X)(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi) \right],$$

donde

$$R(T, X) := \frac{r^2(T, X)}{\sec^2(T + X) \sec^2(T - X)}.$$

---

<sup>5</sup>Como ejercicio adicional, comprobar que estas son efectivamente nulas.

## Ejercicio

Comprobar que la expresión de arriba para la métrica es cierta.

*Pista: usar*

$$t + r = \tan(T + X), \quad \text{y} \quad t - r = \tan(T - X).$$

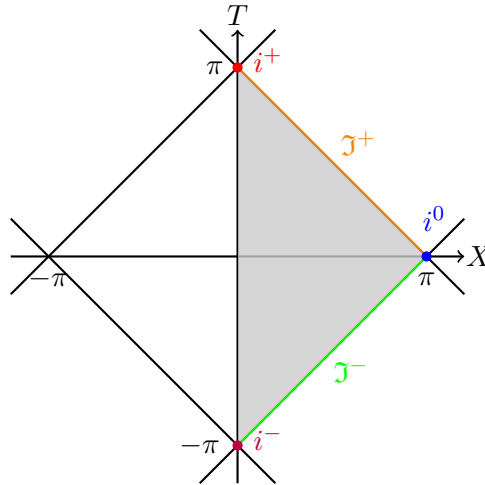
junto con  $d(f(x)) = \partial_i f dx^i$  para hallar  $dt$  y  $dr$  en términos de  $dT$  y  $dX$ , y a continuación multiplicar todos los términos y cancelar.

*Pista 2: Antes de hacer la gran expansión, mirar las expresiones para  $dt$  y  $dr$  y argumenta que son los términos que contienen  $\sec^2(T + X) \sec^2(T - X)$  los que permanecerán.*

Podemos por tanto dibujar el diagrama de

$$g_{\text{diagrama}} = dT \otimes dT - dX \otimes dX,$$

con los rangos  $|T - X| < \pi$ ,  $|T + X| < \pi$  y  $X > 0$ .



donde hemos etiquetado:

- Infinito espacial,  $i^0$ ,
- Infinito Futuro temporal,  $i^+$ ,
- Infinito Pasado temporal,  $i^-$ ,
- Infinito pasado nulo (o luminoso),  $\mathcal{J}^+$ , e
- Infinito Pasado nulo (o luminoso),  $\mathcal{J}^-$ .

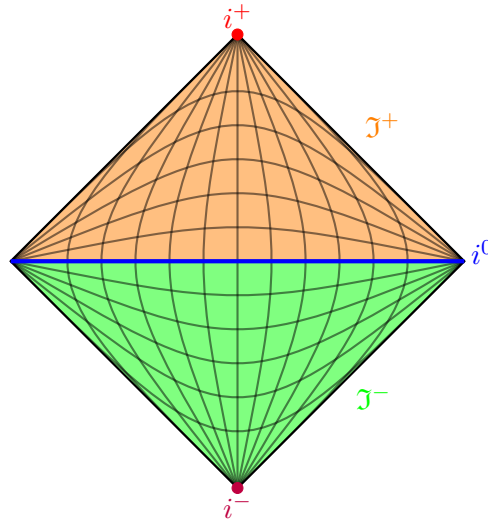
Los puntos anteriores reciben su nombre de la siguiente proposición.

**Proposición 23.2.1.** 1. Todas las geodésicas espaciales comienzan y terminan en  $i^0$ ,

2. Todas las geodésicas nulas comienzan en  $\mathcal{J}^-$  y terminan en  $\mathcal{J}^+$ , y

3. Todas las geodésicas temporales comienzan en  $i^-$  y terminan en  $i^+$ .

Entonces recordamos que hemos suprimido  $\theta$  y  $\varphi$ . Así que si reintegramos el  $\varphi$ , es como girar este diagrama alrededor del eje  $T$ , y obtenemos una forma de diamante.



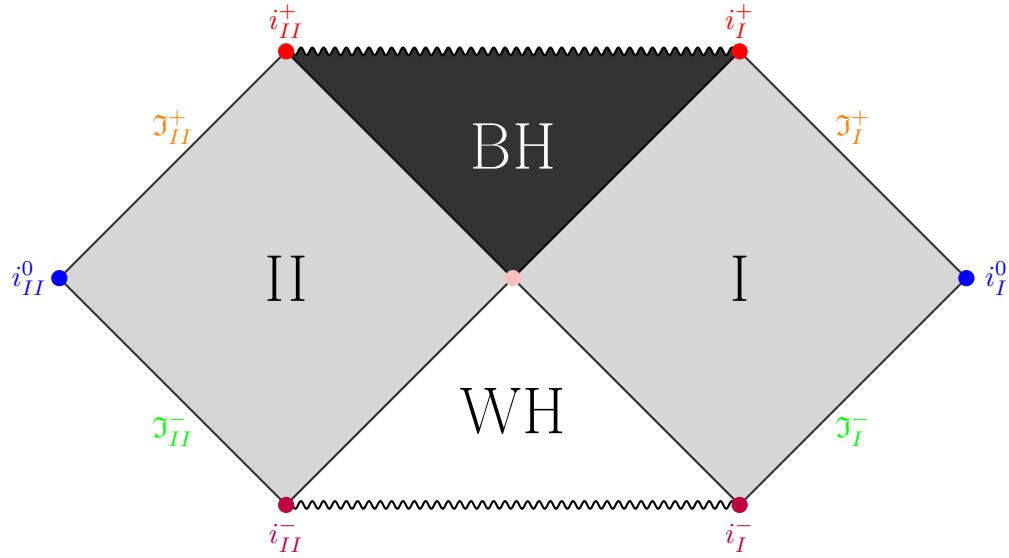
### 23.3 Otros Espaciotiempo

En los siguientes diagramas utilizaremos el gris claro para sombrear el(los) universo(s), el amarillo para sombrear el(los) antiverso(s), el negro para sombrear el(los) agujero(s) negro(s), el blanco para sombrear el(los) agujero(s) de gusano, y las líneas en forma de serpiente para indicar las singularidades, utilizando una línea discontinua para las singularidades del anillo, para recordarnos que se pueden evitar. También nos ceñiremos a los colores anteriores para etiquetar las  $i$ s y  $J$ s. También utilizaremos números latinos en mayúsculas (es decir, I, II, etc.) para numerar los universos.

#### 23.3.1 Agujero negro de Schwarzschild

Si se toman las coordenadas de Kruskal-Szekeres máximamente extendidas para el agujero negro de Schwarzschild, mostrado al final de la última sesión, y se compacta a lo largo de las diagonales, se obtiene el siguiente diagrama de Penrose.



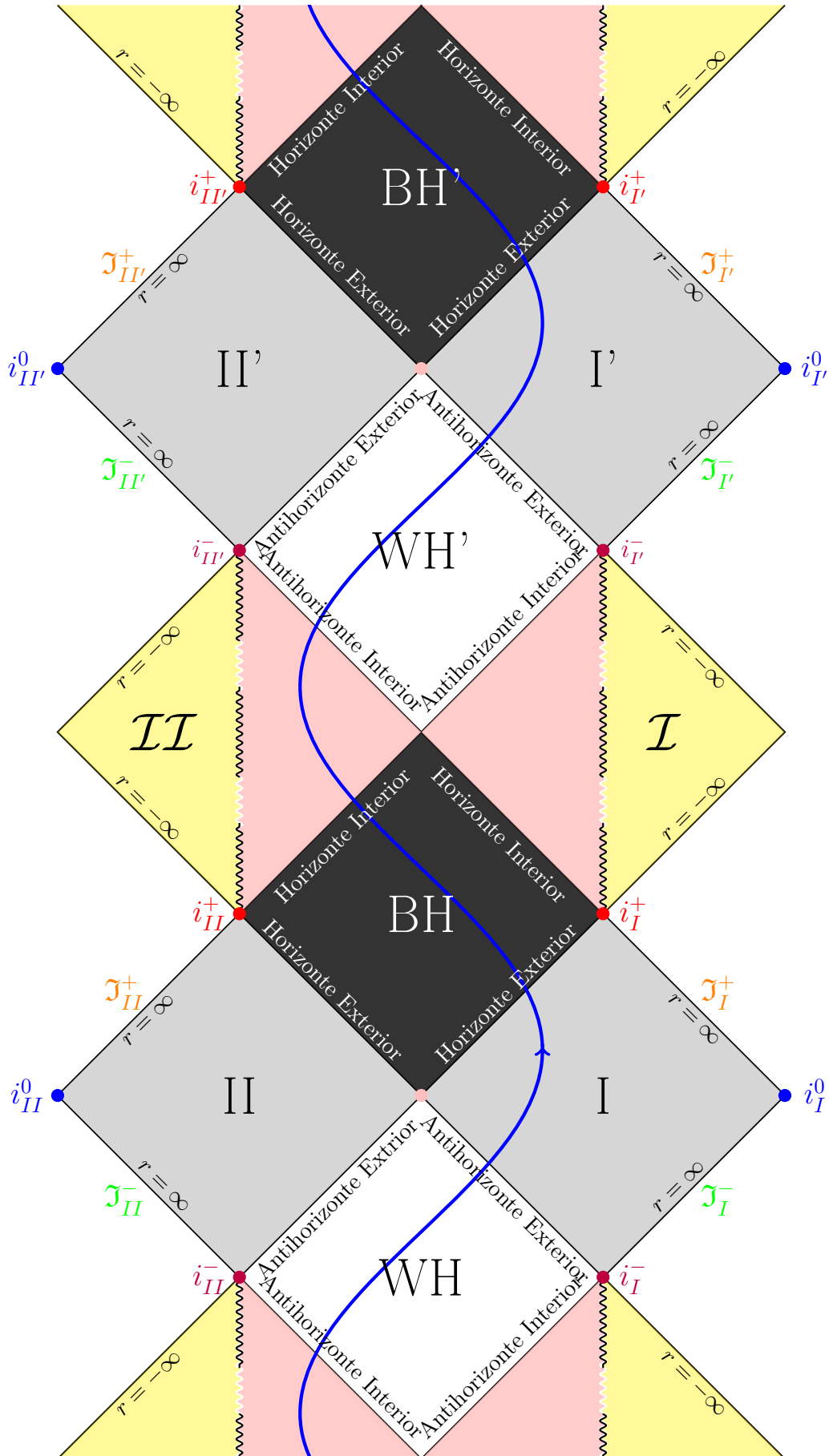


Ya hemos discutido básicamente este diagrama completo al considerar las coordenadas de Kruskal-Szekeres, por lo que no hacemos más comentarios aquí.

### 23.3.2 Agujero Negro de Kerr

Recordemos que un agujero negro de Kerr es un agujero negro eléctricamente neutro y en rotación, que tiene una singularidad anular y dos horizontes de sucesos. La presencia del horizonte interior (el de menor  $r$ ) resulta que da lugar al paso a un agujero de gusano, que a su vez conduce a un agujero blanco y luego a otro universo. También resulta ser cierto que se puede atravesar el disco delimitado por la singularidad anular y emerger en lo que algunos denominan un *antiverso*. El diagrama de Penrose para un agujero negro de Kerr es la siguiente bestia.

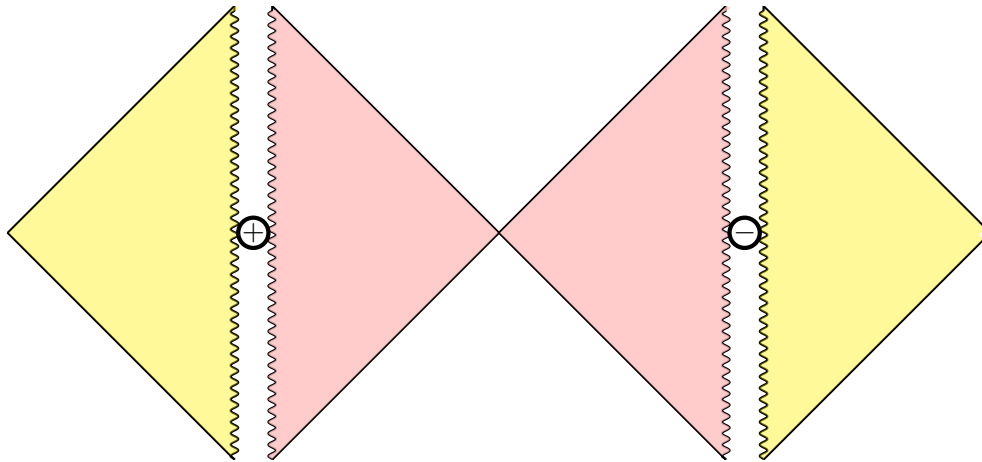
Vemos que tenemos un universo tras otro, y a diferencia de la solución de Schwarzschild, estos universos están conectados causalmente. Así que un observador podría viajar al interior del agujero negro y salir a un agujero de gusano a través del horizonte de sucesos interior y luego a otro universo. Nótese que los límites del antiverso corresponden a  $r = -\infty$ .



Hay un punto interesante e importante a tener en cuenta sobre las regiones antiversas (*antiverse regions*)  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{II}$ ; no hay horizonte de sucesos entre el "blindaje" de la singularidad del anillo. Tal singularidad se conoce como **desnuda**. Esto viola la llamada *hipótesis de censura cósmica débil* que dice vagamente que las singularidades no deberían ser observables hasta el infinito nulo, de ahí que no hayamos etiquetado los límites  $r = -\infty$  con  $\mathcal{I}^+$ s.

### 23.3.3 Agujero Negro de Reissner-Nordström

Un agujero negro de Reissner-Nordström es un agujero negro no giratorio y cargado eléctricamente. Como el agujero negro ya no gira, no tiene por qué tener una singularidad anular y, por tanto, ya no podemos evitarlo y pasar a los antiversos. El diagrama de Penrose es básicamente idéntico al diagrama de Kerr-Penrose, pero con las líneas quebradas en forma de serpiente hechas continuas. También se dibuja a veces con el antiverso separado de la región del agujero de gusano y con una indicación de la carga de ese lado del agujero negro. Es decir, las partes relevantes del diagrama pasan a ser las siguientes



Lo que hemos descrito anteriormente es en realidad el caso de un llamado agujero negro *sub-extremo* Reissner-Nordström, lo que significa que los dos horizontes no coinciden. Si realmente se escribe la métrica y se encuentra dónde se producen estos horizontes, se ve que los dos pueden coincidir realmente si la masa y la carga del agujero negro son iguales. En este caso la topología del diagrama cambia. No vamos a dibujar el diagrama aquí<sup>6</sup>, sino que simplemente hacemos este comentario para completarlo.

*Observación 23.3.1.* Obsérvese que hay un cambio de topología entre el caso extremo y el sub-extremo, por lo que no se cree que podamos convertir un agujero negro sub-extremo de Reissner-Nordström en uno extremo simplemente añadiéndole carga. De hecho, añadir carga requeriría energía y, por tanto, también aumentaría la masa del agujero negro, manteniendo el agujero negro sub-extremo.

### 23.3.4 Agujero Negro de Kerr-Newmann

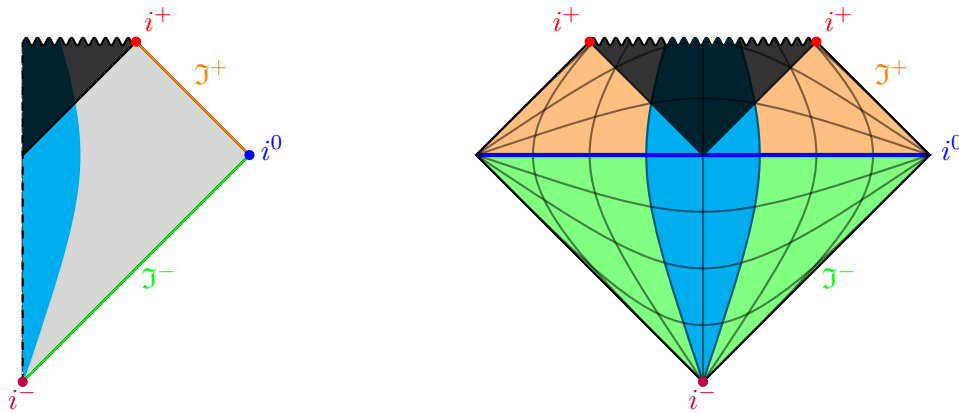
Un agujero negro de Kerr-Newmann gira y tiene carga eléctrica. Por tanto, esperamos que el diagrama de Penrose sea una combinación de los dos anteriores. Efectivamente, este es el

<sup>6</sup>Puede ser encontrado [aquí](#).

caso. De nuevo, al tener la singularidad anular, es posible evitarla y entrar en los antiversos. El diagrama de Penrose para el agujero negro de Kerr-Newmann suele dibujarse de forma idéntica al que hemos presentado para el agujero negro de Kerr, pero es importante recordar que debemos indicar la carga del agujero negro en alguna parte, como hicimos con el agujero negro de Reissner-Nordström. No dibujaremos aquí el diagrama para ahorrar espacio.

### 23.3.5 Colapso Gravitacional

Todos los diagramas de Penrose para los agujeros negros suponen que el agujero negro siempre ha existido. Es decir, que no se formaron mediante algún proceso físico como el colapso de alguna estrella masiva. Ahora queremos dibujar un diagrama de Penrose de este tipo. En el siguiente diagrama, el área de color ciano indica la materia que colapsa, y la línea discontinua indica que la línea  $r = 0$  no forma parte del universo.



El diagrama anterior podría sugerir que la materia primero se dispersa y luego se vuelve a juntar, pero tenemos que recordar que las trayectorias de las geodésicas temporales se ven afectadas por nuestros factores conformes. La materia se va colapsando a medida que se asciende en el diagrama y, una vez que la masa está dentro del radio de Schwarzschild  $r = 2m$ , forma un agujero negro. De nuevo, este diagrama tiene dos dimensiones suprimidas, y a la derecha hemos intentado dibujar el aspecto que tiene después de rotar alrededor de la línea vertical.

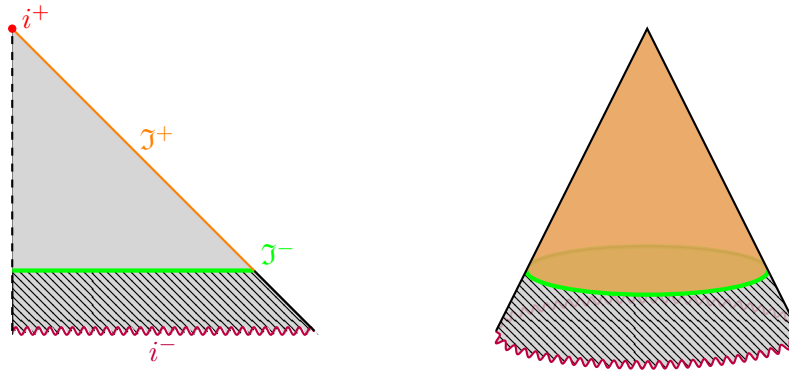
Nótese que al exigir que el agujero negro de Schwarzschild se forme de esta manera (en lugar de haber existido siempre) se ha eliminado la muy indeseable región de agujero blanco en el diagrama.

### 23.3.6 Universo Isotrópico & Homogéneo

Consideremos el caso de que el universo esté lleno sólo de radiación (es decir,  $\kappa = 0 = \Lambda$ ). Durante un breve período después del Big Bang, ciertos procesos "retuvieron" la luz y, por tanto, el universo era opaco, y luego, en algún momento, se permitió la propagación de la luz, haciendo que el universo fuera transparente.

En el diagrama suprimido, los puntos en los que el universo se vuelve transparente serán una línea horizontal (ya que es una línea espacial). Si a continuación reinsertamos las dimensiones suprimidas, esta línea se convierte en una bola que nos rodea. Esto se conoce como

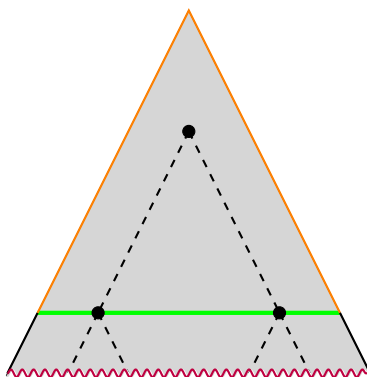
*fondo cósmico de microondas*, o CMB para abreviar. Esto es algo importante, ya que es algo que deberíamos ser capaces de observar experimentalmente, y apoya aún más la teoría del Big Bang. De hecho, algunas personas incluso se refieren al CMB como "el resplandor posterior al Big Bang".



Hemos utilizado un relleno rayado para indicar la región donde el universo es opaco. La línea verde se utiliza para indicar que los rayos de luz son libres de propagarse desde ese punto en adelante.<sup>7</sup> Nótese que la singularidad de la parte inferior corresponde al infinito temporal pasado. Esta es la afirmación de que toda la materia (que viaja a lo largo de las curvas de tiempo) es creada por el Big Bang. A la derecha hemos incluido de nuevo la reintroducción de una de las dimensiones suprimidas, y vemos que el CMB se convierte en un disco. En realidad hay una pregunta muy importante que hacer sobre el CMB, que destacamos ahora con el uso del siguiente diagrama.

Los experimentos nos dicen que dondequiera que miremos el CMB obtenemos datos similares, por ejemplo, que la temperatura es de unos 3K. Esto podría no parecer un problema, después de todo queremos homogeneidad e isotropía, pero plantea un problema. Proyectando el diagrama girado en un plano 2D para simplificar el dibujo, consideremos algún punto del universo y observemos su cono de luz pasado al que los puntos están casualmente conectados, es decir, pueden influir en nuestro punto. Tomemos los dos puntos de la línea divisoria opaca-transparente y consideremos sus conos pasados, si no se superponen son completamente independientes. Es decir, no hay ningún punto que pueda influir en ambos puntos.

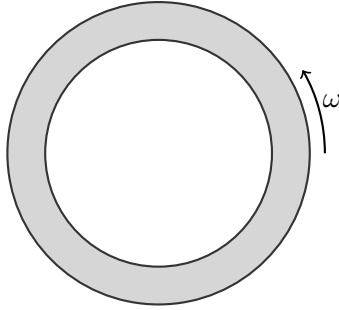
<sup>7</sup>Podríamos en realidad no ser capaces de llamar a esto  $J^-$  porque tal vez las geodésicas nulas se definen por debajo de esta línea. En realidad no sé la respuesta a esta pregunta, si algún lector lo sabe por favor siéntase libre de enviarme una explicación y la actualizaré con crédito.



Si los puntos son completamente independientes, ¿por qué obtenemos las mismas mediciones para ambos? Esto no es sólo para dos puntos especiales en el CMB, sino para *todos* los puntos del CMB. Este problema se conoce como el *problema del horizonte cosmológico* (o el *problema de la homogeneidad*). La solución más comúnmente aceptada para el problema es incluir un llamado *campo de inflación*, que da lugar a *inflación cósmica*.

## 24 | Teoría de la Perturbación I

Hemos visto que para poder resolver las ecuaciones de Einstein con exactitud, necesitamos condiciones de simetría fuertes o, lo que es lo mismo, simplemente tensores de energía-momento. Esto es una lástima, ya que obviamente nos gustaría estudiar también los casos de condiciones de simetría más débiles. Un ejemplo importante sería encontrar el campo gravitatorio,  $g$ ,<sup>1</sup> dentro de una capa ("shell") de masa giratoria uniformemente distribuida.



Nótese que la gravedad de Newton, que viene dada por la ecuación de Poisson

$$\rho = \nabla^2 \phi,$$

nos diría que el campo gravitatorio dentro de la capa se desvanece como  $\rho$  se desvanece dentro de ella. Además de este hecho, la introducción de la rotación no afectaría al campo gravitatorio ya que lo único que le importa a la ecuación de Poisson es la distribución de la masa  $\rho$ , y nuestra masa está distribuida uniformemente por lo que no hay ningún cambio por la rotación.

Ecuaciones de Einstein<sup>2</sup>

$$G_{ab}[g] = T_{ab}[g, \Phi],$$

codificarán tanto un campo no evanescente dentro de la capa como también codificarán el cambio debido a la introducción de la rotación, ya que las componentes de  $T_{0\mu}$  codifican el momento angular.

### 24.1 Perturbación de Soluciones Exactas

Supongamos que una solución exacta  $g$  a unas ecuaciones de Einstein

$$G_{ab}[g] = T_{ab}[g]$$

<sup>1</sup>Técnicamente  $g$  es el potencial gravitatorio, pero esta sutileza no es importante aquí.

<sup>2</sup>En unidades donde  $\frac{8\pi G_N}{c^4} = 1$ .

se conoce en términos de las funciones componentes  $g_{ab}$  con respecto a alguna(s) carta(s) de coordenadas. Sería bueno poder extraer el potencial gravitatorio,  $g_{ab} + \delta g_{ab}$ , que resuelve las ecuaciones

$$G_{ab}[g + \delta g] = T_{ab}[g] + \delta T_{ab}[g],$$

donde  $\delta T_{ab}[g]$  es una pequeña perturbación del lado derecho de las ecuaciones de Einstein. Si la perturbación en el lado derecho es pequeña, podemos suponer que  $\delta g$  mismo es pequeño<sup>3</sup> y así podemos expandir

$$G_{ab}[g] + \delta G[g, \delta g] + \mathcal{O}(\delta g^2) = T_{ab}[g] + \delta T_{ab}[g],$$

donde  $\delta G[g, \delta g]$  tiene dependencia lineal de  $\delta g$ . Eliminando los términos de orden superior y utilizando el hecho de que  $g$  es una solución exacta, tenemos

$$\delta G_{ab}[g, \delta g] = \delta T_{ab}[g].$$

La tarea restante es entonces encontrar  $\delta g_{ab}$ . Este método se conoce como "teoría de perturbación lineal".

*Ejemplo 24.1.1.* Para la capa de masa, podríamos considerar que la solución exacta es aquella en la que no hay ninguna capa, es decir

$$G_{ab}[g] = 0.$$

Sabemos que la solución exacta viene dada por la métrica plana  $g = \eta$ . Ahora podemos plantear la cuestión de introducir una pequeña masa que gire lentamente y tratarla como una perturbación del tensor energía-momento,

$$\delta G_{ab}[\eta, \delta g] = \delta T_{ab}[g].$$

*Observación 24.1.2.* Resultará interesante considerar también los casos en los que el lado derecho de las ecuaciones de Einstein no está perturbado (es decir,  $\delta T_{ab}[g] = 0$ ). Esto nos llevará, por ejemplo, a las llamadas *ondas gravitacionales*. Esto puede parecer extraño, ya que ¿cómo podemos perturbar la métrica pero no el lado derecho de las ecuaciones de Einstein? La respuesta es la idea de que el lado derecho codifica la materia en el espaciotiempo, mientras que la métrica codifica la gravedad y la curvatura. Podemos pensar que esto es como "empujar" la variedad del espaciotiempo y hacer que se ondule, sin introducir ninguna materia nueva. Con el mismo argumento vemos que  $\delta T_{ab}$  es sólo una función de  $g$  y no  $\delta g$ .

## 24.2 La métrica perturbada

La idea es la siguiente: de todos modos estamos calculando/resolviendo en alguna carta  $(U, x)$ , así que podemos igualmente arreglar que nuestra solución exacta conocida tome una forma

<sup>3</sup>Si resultara no ser pequeño, deberíamos tener que un pequeño cambio en el lado derecho de nuestras ecuaciones de movimiento da lugar a un gran cambio en el lado izquierdo, indicando que la solución no es estable. Evidentemente, ignoramos cualquier caso como éste por motivos físicos.



particular. Por ejemplo, para una métrica estática  $g$ , siempre podemos encontrar un gráfico  $(U, x)$  tal que

$$g_{ab} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & -\gamma_{\alpha\beta} & \\ 0 & & & \end{array} \right),$$

donde  $\gamma_{\alpha\beta}$  es alguna métrica-3 de Riemann dependiente del tiempo. Podemos escribir esto de forma más compacta como

$$g = dx^0 \otimes dx^0 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta.$$

Este caso particular es útil para considerar perturbaciones sobre el espaciotiempo de Schwarzschild, por ejemplo.

Ahora es inteligente describir los 10 campos pequeños codificados en  $\delta g_{ab}$  como

$$\delta g = 2a dx^0 \otimes dx^0 - b_\alpha [dx^0 \otimes dx^\alpha + dx^\alpha \otimes dx^0] - [2c \gamma_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta}] dx^\alpha \otimes dx^\beta,$$

para *pequeños*

- (i) campos escalares  $a$  y  $c$ ,
- (ii) campo vectorial  $b^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} b_\beta$ ,
- (iii) campo tensorial simétrico  $e_{\alpha\beta}$ , que está libre de trazas,  $\gamma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} = 0$ , espaciales,

todos los cuales pueden depender de todos los  $x^a$ s (es decir, pueden depender de  $x^0$ , aunque sean espaciales).

Observación 24.2.1. Nótese que esto es sólo la perturbación. Es decir, la nueva métrica completa es  $g + \delta g = (1 + 2a)dx^0 \otimes dx^0 - \dots$

Contando el número de grados de libertad, tenemos

- (i)  $1 + 1 = 2$ ,
- (ii)  $3$ ,
- (iii)  $\frac{3(3+1)}{2} - 1 = 5$

para dar un total de 10, como se requiere.

Observación 24.2.2. Es simplemente conveniente pensar en una perturbación general de la métrica en términos de estos 10 grados de libertad.

Observación 24.2.3. Utilizaremos una notación tal que los índices griegos que no aparecen en su posición natural han sido elevados/bajados utilizando  $\gamma^{\alpha\beta}/\gamma_{\alpha\beta}$ . Hacemos esto sólo para aligerar un poco la notación.

### 24.3 Helmholtz-Hodge

Es sumamente útil descomponer aún más el

- (a) campo vectorial  $b_\alpha$  como

$$b_\alpha = D_\alpha B + B_\alpha,$$

donde  $D$  es la derivada covariante de Levi-Civita de  $\gamma$ ,  $B$  es un campo escalar y  $B_\alpha$  es un campo vectorial <sup>4</sup>,  $D_\alpha B^\alpha = 0$ . Esto se conoce como **Teorema de Helmholtz**, y en realidad afirma que  $B$  y  $B_\alpha$  son únicos.

- (b) campo tensorial  $e_{\alpha\beta}$  como

$$e_{\alpha\beta} = \left( 2D_{(\alpha} D_{\beta)} - \frac{1}{3} \gamma_{\alpha\beta} \Delta \right) E + 2D_{(\alpha} E_{\beta)} + E_{\alpha\beta},$$

donde  $\Delta := \gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta$  es el *Laplaciano* espacial,  $E$  es un campo escalar,  $E_\alpha$  es un campo vectorial libre de divergencia, y  $E_{\alpha\beta}$  es un campo tensorial simétrico, libre de divergencia,  $D_\alpha E^{\alpha\beta} = 0$ , y libre de trazas. Esta descomposición es única también, y es conocida como **Teorema de Hodge**.

Por tanto una perturbación general de una métrica estática se descompone únicamente en tres tipos de perturbación independientes:

$$\delta g = \delta g_{\text{escalar}} + \delta g_{\text{vector}} + \delta g_{\text{tensor}}.$$

Si hacemos las descomposiciones triviales  $a = A$  y  $c = C$ , la fórmula anterior se resume en la siguiente tabla, donde hemos incluido alguna terminología común para las categorías

Tipo de perturbación	Contiene	Terminología
$\delta g_{\text{escalar}}$	$A, B, C$ y $E$	Escalares
$\delta g_{\text{vector}}$	$B_\alpha$ y $E_\alpha$	Campos vectoriales solenoidales
$\delta g_{\text{tensor}}$	$E_{\alpha\beta}$	Simétricos, campos tensoriales TT <sup>5</sup>

La gente dice entonces que "las perturbaciones escalares provienen de los escalares, las perturbaciones vectoriales provienen de los campos vectoriales solenoidales y las perturbaciones tensoriales provienen de los campos tensoriales simétricos TT".

La lógica que subyace a esta distinción es que una perturbación  $\delta T_{ab}[g]$  en el lado derecho, que es efectuada sólo por un campo escalar, *a lo sumo* "cambiará" los campos escalares en la métrica  $g + \delta g$  en el lado izquierdo. De forma similar para las perturbaciones solenoidales y TT del tensor energía-momento.

Esto significa que si descomponemos el lado derecho de nuestro sistema perturbado en los tres tipos de contribuciones, podemos resolver cada parte por separado y ver su contribución al sistema.

<sup>4</sup>libre de divergencia

<sup>5</sup>TT significa libre de Traza y Transverso.

Observación 24.3.1. Téngase en cuenta que la descomposición anterior sólo funciona en la teoría de la perturbación *lineal*, ya que los términos de orden superior contendrían términos cruzados cuando se expanden las descomposiciones. Así que sólo podemos hacer la resolución anterior de forma independiente para la teoría de perturbaciones lineales.

Ejemplo 24.3.2. Para nuestra capa en rotación, la perturbación escalar viene dada por la introducción de la distribución de masa  $\rho$ , y la perturbación solenoidal viene dada por la introducción de la rotación, ya que el campo vectorial asociado a ella es libre de divergencia (es esencialmente un campo de rizo). Podríamos introducir una perturbación TT aplicando presión a la capa.

Observación 24.3.3. Es importante considerar qué es lo que contribuye fundamentalmente a la perturbación. En nuestro ejemplo de la capa, podríamos pensar que algún campo vectorial que hace que la capa pulse y oscile en tamaño es una perturbación vectorial solenoidal. Este no es el caso, ya que no es libre de divergencia y por lo tanto no es una perturbación vectorial *solenoidal*. Es, de hecho, una contribución escalar ya que el campo vectorial requerido puede obtenerse como el gradiente de algún campo escalar, y es el campo escalar el que genera la perturbación.

Terminología. A pesar de la última observación, la gente no suele decir "solenoidal" y se limita a decir "perturbaciones vectoriales". Del mismo modo, se limitan a decir "perturbaciones tensoriales".

## 24.4 El Precio Pagado Por El Lujo De Trabajar En Una Carta

Hemos argumentado una y otra vez que los objetos del mundo real, como la métrica, son independientes del gráfico (carta) que se elija para expresarlos, y que los componentes de estos objetos pueden variar enormemente de una carta a otra.

Hasta ahora hemos calculado todo lo que hay en la carta  $(U, x)$  y hemos obtenido algún  $\delta g_{(x)ab}$ . La pregunta obvia es si existe otro gráfico  $(U, y)$  tal que

$$g_{(x)ab} + \delta g_{(x)ab} = g_{(y)ab}?$$

Si este es el caso, no tenemos más remedio que concluir que la métrica con componentes  $g_{(x)ab} + \delta g_{(x)ab}$  es precisamente la métrica con la que empezamos. Es decir, en realidad no hemos encontrado una perturbación del *mundo real* para el sistema, sino que hemos generado una "falsa" a nivel de la carta.

Ejemplo 24.4.1. Consideremos un plano infinitamente extendido. Introducimos una densidad de materia uniformemente distribuida en todo el plano. La teoría newtoniana nos dice que el campo gravitatorio es homogéneo y que sólo apunta de forma ortogonal al plano. Sin embargo, al hablar de las fuerzas de marea vimos que en la relatividad general dicho campo gravitatorio puede eliminarse por transformación a un marco de caída libre. Por tanto, podemos encontrar un sistema de coordenadas en el que la contribución de la materia desaparezca, y por eso se trata de una perturbación "falsa".

La idea de este problema es que para

- (i) perturbaciones escalares, sólo dos combinaciones de  $A, B, C$  y  $E$

$$\Psi := A + \dot{B} - \ddot{E}, \quad \text{y} \quad \Phi := C - \frac{1}{3}\Delta E$$

- (ii) perturbaciones vectoriales, sólo una combinación de  $B_\alpha$  y  $E_\alpha$

$$\Theta_\alpha = B_\alpha - \dot{E}_\alpha$$

- (iii) perturbaciones tensoriales todas las  $E_{\alpha\beta}$

no se ven afectadas (y por lo tanto no se pueden eliminar) por las transformaciones de coordenadas generales. Se conocen como **invariantes de calibre**. Son las únicas que se pueden tomar en serio. Deduciremos estos resultados en la próxima sesión.

Este concepto debería ser familiar desde la electrodinámica, donde sabemos que los campos  $A_\mu$  por sí mismos no son físicamente significativos, pero ciertas combinaciones sí lo son, por ejemplo los componentes del tensor de intensidad de campo  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

## 25 | Teoría de la Perturbación II

Es un hecho que cualquier transformación de coordenadas pequeña, pero por lo demás arbitraria, viene dada por la elección del campo vectorial  $\xi$ , cuyas funciones componentes con respecto a la carta original,  $\xi_{(x)}^m$ , son pequeñas. Entonces el cambio en el que incurren los componentes de la métrica bajo una transformación tan pequeña, pero por lo demás arbitraria, viene dado por <sup>1</sup>

$$\Delta_\xi g_{ab} = (\mathcal{L}_\xi g)_{ab},$$

donde  $\mathcal{L}$  es la derivada de Lie. En otras palabras, si la  $\delta g_{ab}$  toma esta forma es una perturbación "falsa", como se describe al final de la última sesión. Pero, por supuesto, escribimos

$$g_{ab} + \delta g_{ab},$$

por lo que debemos estudiar cómo cambia  $\delta g_{ab}$  si elegimos un  $\xi$  pequeño y arbitrario. Si se trata de una perturbación falsa, entonces sabemos que el cambio en los componentes de la métrica es de la forma anterior, pero  $\delta g_{ab}$  es el cambio en la métrica, por lo que tomar un cambio adicional  $\xi$  nos dará simplemente

$$(\Delta_\xi \delta g)_{ab} = (\mathcal{L}_\xi \delta g)_{ab},$$

donde observamos que no hay  $\delta$  en el lado derecho. El objetivo es encontrar qué componentes son falsos y luego trabajar qué combinaciones de componentes, si es que hay alguna, se cancelan en el lado derecho dándonos una perturbación real.

### 25.1 Calcular $\Delta_\xi a$ , $\Delta_\xi c$ , $\Delta_\xi b_\alpha$ & $\Delta_\xi e_{\alpha\beta}$

Aunque en la última clase hicimos la descomposición a las letras mayúsculas ( $A, B_\alpha$ , etc.), en realidad es más inteligente resolver primero el cambio de las minúsculas.

Nuestra carta es  $(U, x)$  donde  $g = dx^0 \otimes dx^0 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$ . Podemos descomponer el campo vectorial  $\xi$  en esta carta como

$$\xi = T\partial_0 + L^\beta \partial_\beta,$$

donde  $T$  y  $L^\mu$  son campos escalares que pueden depender de todas las coordenadas de la carta, incluyendo  $x^0$ . A continuación, calculamos el cambio de  $\delta g_{ab}$  incurrido por  $\xi$  considerando  $T$

<sup>1</sup>La  $\Delta_\xi$  aquí no es el Laplaciano, sino que simplemente denota el cambio bajo  $\xi$ .

y  $L^\mu$ . Tenemos

$$\begin{aligned} (\Delta_\xi \delta g)_{ab} &= (\mathcal{L}_\xi g)_{ab} \\ &= \xi^m g_{ab,m} + \xi^m_{,a} g_{mb} + \xi^m_{,b} g_{am} \\ &= T g_{ab,0} + L^\mu g_{ab,\mu} + T_{,a} g_{0b} + L^\mu_{,a} g_{\mu b} + T_{,b} g_{a0} + L^\mu_{,b} g_{a\mu}. \end{aligned}$$

Consideramos ahora cada uno de los componentes por separado. Usando un punto para indicar una derivada con respecto a  $x^0$ , tenemos:

$$(\Delta_\xi \delta g)_{00} = 0 + 0 + \dot{T} + 0 + \dot{T} + 0 = 2\dot{T},$$

donde hemos usado el hecho de que  $g_{00} = 1$  y  $g_{0\alpha} = 0$ .

A continuación tenemos

$$(\Delta_\xi \delta)_{0\beta} = 0 + 0 + 0 - \dot{L}^\mu \gamma_{\mu\beta} + T_{,\beta} + 0 = -\dot{L}^\mu \gamma_{\mu\beta} + T_{,\beta},$$

donde hemos usado  $g_{0\beta} = 0$ ,  $g_{00} = 1$  y  $g_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}$ . Podemos entonces usar el hecho de que  $\gamma_{\alpha\beta}$  es independiente de  $x^0$  para dar

$$(\Delta_\xi \delta)_{0\beta} = T_{,\beta} - (L^\mu \gamma_{\mu\beta})_{,0} = D_\beta T - \dot{L}_\beta,$$

donde  $D_\beta$  es la derivada covariante de Levi-Civita usando  $\gamma$ .

Finalmente tenemos

$$(\Delta_\xi \delta g)_{\alpha\beta} = 0 - L^\mu \gamma_{\alpha\beta,\mu} + 0 - L^\mu_{,\alpha} \gamma_{\mu\beta} + 0 - L^\mu_{,\beta} \gamma_{\alpha\mu}.$$

Entonces usamos

$$L^\mu_{,\alpha} \gamma_{\mu\beta} = (L^\mu \gamma_{\mu\beta})_{,\alpha} - L^\mu \gamma_{\mu\beta,\alpha}$$

para dar

$$(\Delta_\xi \delta g)_{\alpha\beta} = -2 \left[ L_{(\alpha,\beta)} - \frac{1}{2} L^\mu (\gamma_{\mu\beta,\alpha} + \gamma_{\mu\alpha,\beta} - \gamma_{\alpha\beta,\mu}) \right] = -2D_{(\alpha} L_{\beta)},$$

donde de nuevo  $D_\alpha$  es la derivada covariante de Levi-Civita usando  $\gamma$ .

Usando la expresión para  $\delta g$  en términos de  $a, b_\alpha, c$  y  $e_{\alpha\beta}$  de la última clase, concluimos que

$$\begin{aligned} \Delta_\xi(2a) &= 2\dot{T} \\ \Delta_\xi(-b_\alpha) &= D_\alpha T - \dot{L}_\alpha \\ \Delta_\xi(-2c\gamma_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}) &= -2D_{(\alpha} L_{\beta)}. \end{aligned}$$

Las dos primeras expresiones nos dicen claramente que

$$\Delta_\xi a = \dot{T}, \quad \text{y} \quad \Delta_\xi b_\alpha = \dot{L}_\alpha - D_\alpha T,$$

pero la tercera expresión necesita un poco de trabajo. Contraemos ambos lados con  $\gamma^{\alpha\beta}$  y usamos  $\gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} = 3$  junto con el hecho de que  $D$  es compatible  $\gamma$ -métrica (por lo que podemos "tomar  $\gamma$  dentro de ella"), dando

$$6\Delta_\xi c + \Delta_\xi \gamma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} = 2D_\alpha (\gamma^{\alpha\beta} L_\beta) \quad \implies \quad \Delta_\xi c = \frac{1}{3} D_\alpha L^\alpha,$$

donde hemos utilizado la condición de ausencia de trazos de  $e_{\alpha\beta}$ . De esto se deduce que

$$\Delta_\xi e_{\alpha\beta} = 2D_{(\alpha} L_{\beta)} - \frac{2}{3} D_\mu L^\mu \gamma_{\alpha\beta}.$$

## 25.2 Perturbaciones Escalares

Ahora queremos considerar los campos descompuestos, y empezamos con las perturbaciones escalares.

Afirmación 25.2.1. Si consideramos el caso aparentemente restringido  $L^\alpha = D^\alpha L$  para algún campo escalar  $L$ , en realidad obtenemos el mismo resultado para las perturbaciones escalares que si lo hubiéramos hecho de forma general.

No demostraremos esta afirmación aquí, sino que la utilizaremos para simplificar lo siguiente.

Usando la afirmación anterior y los resultados de la última clase vemos que

$$\begin{aligned}\Delta_\xi A &= \dot{T}, \\ \Delta_\xi B &= \dot{L} - T \\ \Delta_\xi C &= \frac{1}{3}\Delta L \\ \Delta_\xi E &= L,\end{aligned}$$

donde en el lado derecho de la ecuación  $C \Delta$  es el Laplaciano.

### Ejercicio

Demostrar que los resultados anteriores se mantienen.

*Pista:* Si estás atascado el Dr. Schuller hace esto en los videos.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Hay un par de factores de 2 para el  $E$  en mis notas que creo que el Dr. Schuller se perdió, pero terminan cancelando por encima, por lo que obtengo el mismo resultado para  $\Delta_\xi E$ .

Ahora podemos utilizar estos resultados para mostrar los resultados citados al final de la última sesión, a saber

$$\Psi := A + \dot{B} - \ddot{E}, \quad \text{y} \quad \Phi := C - \frac{1}{3}\Delta E$$

son invariantes de tipo calibre ("gauge").

### Ejercicio

Demostrar que lo anterior se mantiene.

*Sugerencia:* De nuevo, esto se hace en las conferencias (videos).

Observación 25.2.2. Nótese que estos resultados nos dicen que los escalares  $A, B, C$  y  $E$  no pueden ser "conectados" independientemente, ya que las únicas perturbaciones reales se dan como combinaciones de ellos.

Sólo por conveniencia, y precisamente porque los  $\Phi$  y  $\Psi$  son invariantes de calibración, somos libres de elegir cualquier  $(T, L^\alpha)$  que queramos. Dicha elección se conoce como **calibre** o **calibración**, y el proceso **fijación del calibre**. Una vez más, debería ser familiar para el electromagnetismo. Decidimos utilizar el calibre

$$T := B - \dot{E}, \quad \text{y} \quad L := -E.$$

Hemos elegido este calibre porque entonces

$$\begin{aligned}\Delta_\xi E &= L & \implies & E = 0 \\ \Delta_\xi B &= \dot{L} - T & \implies & B = 0,\end{aligned}$$

y así pues

$$\Psi = A, \quad \text{y} \quad \Phi = C.$$

Esto se conoce como **calibración longitudinal**. Trabajando en este calibre, obtenemos finalmente el lado izquierdo para las perturbaciones escalares de las ecuaciones de Einstein,  $\delta G_{ab} = T_{ab}$ , como

$$\begin{aligned}\delta G_{00} &= 2\Delta\Phi \\ \delta G_{0\alpha} &= 2D_\alpha\dot{\Phi} \\ \delta G_{\alpha\beta} &= \left[2\ddot{\Phi} - \frac{2}{3}\Delta(\Psi + \Phi)\right]\gamma_{\alpha\beta} + \left[D_{(\alpha}D_{\beta)} - \frac{1}{3}\gamma_{\alpha\beta}\Delta\right](\Psi + \Phi)\end{aligned}$$

### 25.3 Perturbaciones Vectoriales

*Afirmación 25.3.1.* Al igual que con las perturbaciones escalares, resulta que podemos considerar los casos aparentemente restringidos de

$$T = 0, \quad \text{y} \quad D_\alpha L^\alpha = 0,$$

y obtener el resultado total.

De nuevo, no probamos esta afirmación, sino que nos limitamos a utilizarla.

Los resultados aquí son

$$\Delta_\xi B_\alpha = \dot{L}_\alpha, \quad \text{y} \quad \Delta_\xi E_\alpha = L_\alpha,$$

y así las únicas cantidades invariantes gauge son

$$\Theta := B_\alpha - \dot{E}.$$

A continuación, utilizamos la **calibración vectorial**, que establece  $E = 0$ , y obtenemos  $\Theta_\alpha = B_\alpha$ . Obtenemos entonces el lado izquierdo de las perturbaciones vectoriales de las ecuaciones de Einstein,

$$\delta G_{0\alpha} = \frac{1}{2}\Delta\Theta_\alpha, \quad \text{y} \quad \delta G_{\alpha\beta} = D_{(\alpha}\dot{\Theta}_{\beta)}.$$

### 25.4 Perturbaciones Tensoriales

*Afirmación 25.4.1.* De nuevo podemos considerar un caso aparentemente restringido, esta vez  $T = 0 = L^\alpha$ .



Con esta afirmación se deduce trivialmente que

$$\Delta_{xi}E_{\alpha\beta} = 0,$$

y por tanto todos los  $E_{\alpha\beta}$  son invariantes gauge. Las ecuaciones del lado izquierdo son

$$\delta G_{\alpha\beta} = -\ddot{E}_{\alpha\beta} + \Delta E_{\alpha\beta}.$$

Observación 25.4.2. Si partimos de la solución exacta  $G_{ab}[g] = 0$  y no introducimos ninguna masa (por tanto  $\delta T_{ab}[g] = 0$ ) obtenemos para las perturbaciones tensoriales

$$-\ddot{E}_{\alpha\beta} + \Delta E_{\alpha\beta} = 0,$$

que es una *ecuación de onda*. Estas son las llamadas **ondas gravitacionales**. Es importante notar que esta ecuación de onda está hecha de cantidades invariantes gauge y es una onda del mundo real, no una "onda de coordenadas" que puede ser eliminada por una transformación.

## 26 | Tutoriales

Los siguientes capítulos son los tutoriales del curso. No he incluido todo lo que aparece en los tutoriales (por ejemplo, se han omitido las definiciones, etc.), pero he tratado de incluir las preguntas más útiles. Algunas de las respuestas a las preguntas de los tutoriales también se han incluido en el contenido principal de los profesores como observaciones, etc.

### 26.1 Topología

#### 26.1.1 Topologías En Un Conjunto Simple

Sea  $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4\}$  un conjunto.

**Pregunta:**  $\mathcal{O}_1 := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$  constituye una topología en  $\mathcal{M}$ ?

**Solución:** Comprobar las condiciones:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{O}_1$  and  $\mathcal{M} \in \mathcal{O}_1$ .
- (ii)  $\emptyset \cap \{1\} = \emptyset \in \mathcal{O}_1$ ,  $\emptyset \cap \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset \in \mathcal{O}_1$  and  $\{1\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1\} \in \mathcal{O}_1$ .
- (iii)  $\emptyset \cup \{1\} = \{1\} \in \mathcal{O}_1$ ,  $\emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{O}_1$ ,  $\{1\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{O}_1$  and  $\emptyset \cup \{1\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{O}_1$ .

La respuesta por tanto es sí..

**Pregunta:** Y respecto a  $\mathcal{O}_2 := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ .

**Solución:** El único nuevo añadido es  $\{2\}$  por lo que sólo hay que comprobar su implicación. Vemos enseguida que  $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{O}_2$  y así concluimos que no es una topología.

### 26.1.2 Funciones Continuas

**Pregunta:** Sea  $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4\}$  y consideremos el mapa de identidad  $\text{id}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  definido por

$$\text{id}_{\mathcal{M}}(1) = 1, \quad \text{id}_{\mathcal{M}}(2) = 2, \quad \text{id}_{\mathcal{M}}(3) = 3, \quad \text{id}_{\mathcal{M}}(4) = 4.$$

¿Es el mapa  $\text{id}_{\mathcal{M}}$  continuo si el dominio está dotado de la topología caótica y el objetivo con la topología  $\mathcal{O}_{\text{objetivo}} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ ?

**Solución:** La topología caótica aquí es

$$\mathcal{O}_{\text{caótica}} = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Vemos enseguida que la preimagen de  $\{1\} \in \mathcal{O}_{\text{objetivo}}$  es  $\{1\}$  que no está en  $\mathcal{O}_{\text{caótica}}$ , y por lo tanto el mapa no es continuo con respecto a esas topologías.

**Pregunta:** Consideremos el inverso  $\text{id}_{\mathcal{M}}^{-1} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  del mapa de identidad  $\text{id}_{\mathcal{M}}$ , tal que ahora el objetivo está equipado con la topología caótica y el dominio con la topología  $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ .

Proporcionar los valores del mapa  $\text{id}_{\mathcal{M}}^{-1}$  y decidir si  $\text{id}_{\mathcal{M}}^{-1}$  es continuo!

**Solución:**

$$\text{id}_{\mathcal{M}}^{-1}(1) = 1, \quad \text{id}_{\mathcal{M}}^{-1}(2) = 2, \quad \text{id}_{\mathcal{M}}^{-1}(3) = 3, \quad \text{id}_{\mathcal{M}}^{-1}(4) = 4$$

Consideremos ahora las preimágenes.

$$\text{preim}_{\text{id}_{\mathcal{M}}^{-1}}(\emptyset) = \emptyset, \quad \text{y} \quad \text{preim}_{\text{id}_{\mathcal{M}}^{-1}}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\} = \mathcal{M},$$

ambas están en la topología de nuestro dominio. Por lo tanto el mapa es continuo con respecto a esas topologías.

### 26.1.3 La Topología Estándar En $\mathbb{R}^d$

No he incluido aquí la pregunta 4 porque sería dibujar demasiado en Tikz para mí... sin embargo las preguntas merecen la pena ser miradas, así que si no lo han hecho ya vayan a [ver el vídeo](#).

## 26.2 Variedades Topológicas

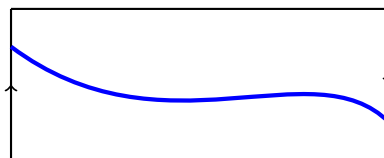
### 26.2.1 Un Atlas Desde Un Mundo Real — el río Möbius

**Pregunta:** Consideremos una cinta Möbius <sup>a</sup> con un río dibujado a lo largo. ¿Cuántas cartas se necesitan para cubrir la cinta Möbius?

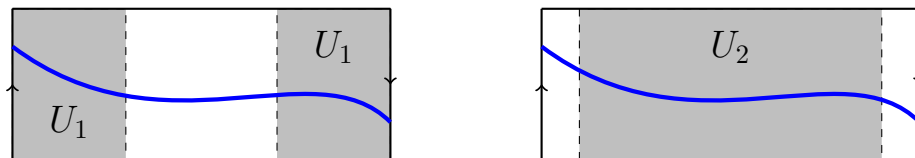
Dibujamos una imagen del río y de la cinta Möbius bajo el(los) mapa(s) de la carta!

<sup>a</sup>Por favor mirar en Google si no la conocen.

**Solución:** La cinta Möbius puede ser representada por el siguiente diagrama



donde las flechas indican cómo identificamos los dos bordes juntos (es decir, la esquina inferior derecha va a la esquina superior izquierda). La línea azul es el río. Está claro que necesitaremos al menos dos cartas para cartografiar toda la franja. Podríamos elegirlos de la siguiente manera



A continuación, definimos mapas de estas regiones sombreadas en  $\mathbb{R}^2$ . Por ejemplo, podemos simplemente mapearlas para que sean las regiones sombreadas de la página, teniendo cuidado de regionalizar adecuadamente las dos partes de  $U_1$ . Para ahorrarme escribir más código Tikz, dejaré esto a tu imaginación.

### 26.2.2 Un Mundo Real Desde Un Atlas

Esto merece la pena verlo en [el vídeo](#), pero sería demasiado difícil para mí hacerlo aquí. Así que, por favor, vayan a ver el vídeo..

### 26.2.3 Antes De La Invención De La Rueda

Consideremos el conjunto  $F^1 := \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^4 + n^4 = 1\}$  de pares de números reales  $(m, n)$ . Que esté dotado de la topología del subconjunto topológico  $\mathcal{O}_s|_{F^1}$  heredada de la topología estándar en  $\mathbb{R}^2$ . **Pregunta:** Estamos en un mapa  $x : F^1 \rightarrow \mathbb{R}$  que mapea un par en  $F^1$  a la primera entrada del par. Escribir esto en términos matemáticos

formales. ¿Es el mapa inyectivo?

**Solución:** El mapa es  $x : F^1 \rightarrow [-1, 1]$  dado por  $x : (m, n) \mapsto m$ . Claramente este mapa no es inyectivo ya que  $x((m, n)) = x((m, n'))$  donde  $n' = -n$ .

**Pregunta:** Este mapa puede hacerse inyectivo restringiendo su dominio a cualquiera de los dos subconjuntos abiertos máximos de  $F^1$ . Cuáles? Llamémosles  $x_\uparrow$  y  $x_\downarrow$ .

**Solución:** El problema era que  $n' = -n$  dio la no inyectividad, por lo que claramente definimos

$$U_\uparrow := \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^4 + n^4 = 1, n > 0\}$$

$$U_\downarrow := \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^4 + n^4 = 1, n < 0\}$$

y así tenemos los mapas

$$x_\uparrow : U_\uparrow \rightarrow (-1, 1), \quad \text{y} \quad x_\downarrow : U_\downarrow \rightarrow (-1, 1).$$

Es importante que tomemos las desigualdades para  $n$  (es decir  $n \neq 0$ ) para que nuestros conjuntos sean abiertos, como exige la pregunta.

**Pregunta:** Ahora, construyamos un mapa inyectivo  $y_\uparrow : F^1 \rightarrow \mathbb{R}$  que mapea cada par en un subconjunto abierto máximo de  $F^1$  a la segunda entrada del par.

**Solución:** Igual que arriba, simplemente definimos

$$V_\uparrow := \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^4 + n^4 = 1, m > 0\},$$

y el mapa

$$y_\uparrow : V_\uparrow \rightarrow (-1, 1),$$

dado por  $y_\uparrow : (m, n) \mapsto n$ .

**Pregunta:** Es  $y_\uparrow$  invertible? Si lo es, construyamos  $y_\uparrow^{-1}$ !

**Solución:** Sí es invertible, ya que es biyectivo. Construimos el inverso como

$$y_\uparrow^{-1} : (-1, 1) \rightarrow V_\uparrow,$$

donde la acción es dada por

$$y_\uparrow^{-1} : n \mapsto (\sqrt[4]{1 - n^4}, n).$$

**Pregunta:** Los dominios de los mapas  $x_\uparrow$  y  $y_\uparrow$  se solapan? Si lo hacen, construir el *mapa de transición*  $x_\uparrow \circ y_\uparrow^{-1}$  y especificar sus dominio y objetivo.

**Solución:** Sí, sus dominios se solapan como

$$U_{\uparrow} \cap V_{\uparrow} = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m^4 + n^4 = 1, n, m > 0\}$$

El mapa de transición es

$$(x_{\uparrow} \circ y_{\uparrow}^{-1}) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$$

con

$$(x_{\uparrow} \circ y_{\uparrow}^{-1})(a) = x_{\uparrow}(\sqrt[4]{1-a^4}, a) = \sqrt[4]{1-a^4} \in (0, 1).$$

**Pregunta:** ¿Cuántos mapas (construidos de esta manera) se necesitan para que sus dominios cubran la totalidad de  $F^1$ ? ¿El conjunto de estos dominios y mapas forma un atlas sobre  $F^1$ ?

**Solución:** La respuesta, obviamente, es 4 mapas  $x_{\uparrow}, x_{\downarrow}, y_{\uparrow}$  y  $y_{\downarrow}$ , y sí, forman un atlas. De aquí vemos que  $F^1$  es una variedad topológica de dimensión  $d = 1$ .

## 26.3 Álgebra Multilineal

### 26.3.1 Espacios Vectoriales

Sea  $V := \mathbb{R}^3$  el conjunto de todos los reales triples.

**Pregunta:** Equipamos  $V$  con adición  $\oplus : V \times V \rightarrow V$  y multiplicación-s  $\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  definido por

$$(a, b, c) \oplus (d, e, f) := (a + d, b + e, c + f)$$

y

$$\lambda \odot (a, b, c) := (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c)$$

donde  $+$  y  $\cdot$  son la adición y la multiplicación en  $\mathbb{R}$ . Comprobar que  $(V, \oplus, \odot)$  es un espacio vectorial.

**Solución:** Tenemos que comprobar que cumple los 8 axiomas.

(i) Conmutativo con respecto a  $\oplus$ :

$$(a, b, c) \oplus (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f) = (d + a, b + e, f + c) = (d, e, f) \oplus (a, b, c).$$

(ii) Asociativo con respecto a  $\oplus$ :

$$\begin{aligned} [(a, b, c) \oplus (d, e, f)] \oplus (h, i, j) &= (a + d, b + e, c + f) \oplus (h, i, j) \\ &= (a + d + h, b + e + i, c + f + j) \\ &= (a, b, c) \oplus (d + h, e + i, f + j) \\ &= (a, b, c) \oplus [(d, e, f) \oplus (h, i, j)]. \end{aligned}$$

(iii) Elemento neutro con respecto a  $\oplus$ : esto es claramente  $(0, 0, 0)$ .

(iv) Inverso con respecto  $\oplus$ : esto es justo  $(-a, -b, -c)$ . Hay que tener en cuenta que para que esto sea verdad es importante que tomemos la línea real completa, no sólo los positivos reales (de lo contrario  $(-a, -b, -c) \notin V$ ).

(v) Asociativo con respecto a  $\odot$ :

$$\begin{aligned}\lambda \odot [\mu \odot (a, b, c)] &= \lambda \odot (\mu \cdot a, \mu \cdot b, \mu \cdot c) \\ &= (\lambda \odot \mu \cdot a, \lambda \odot \mu \cdot b, \lambda \odot \mu \cdot c) \\ &= [\lambda \odot \mu] \odot (a, b, c).\end{aligned}$$

(vi) Distributivo 1:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \odot (a, b, c) &= ((\lambda + \mu) \cdot a, (\lambda + \mu) \cdot b, (\lambda + \mu) \cdot c) \\ &= (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c) \oplus (\mu \cdot a, \mu \cdot b, \mu \cdot c) \\ &= \lambda \odot (a, b, c) \oplus \mu \odot (a, b, c).\end{aligned}$$

(vii) Distributivo 2:

$$\begin{aligned}\lambda \odot [(a, b, c) \oplus (d, e, f)] &= \lambda \odot (a + d, b + e, c + f) \\ &= (\lambda \cdot (a + d), \lambda \cdot (b + e), \lambda \cdot (c + f)) \\ &= (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c) + (\lambda \cdot d, \lambda \cdot e, \lambda \cdot f) \\ &= \lambda \odot (a, b, c) \oplus \lambda \odot (d, e, f).\end{aligned}$$

(viii) Unitario con respecto a  $\odot$ : Claramente  $1 \odot (a, b, c) = (a, b, c)$ .

**Pregunta:** Consideremos el mapa  $d : V \rightarrow V$ ;  $(a, b, c) \mapsto d((a, b, c)) := (b, 2c, 0)$ . Es  $d$  lineal?

**Solución:** Consideremos

$$\begin{aligned}d(\lambda \odot [(a, b, c) \oplus (d, e, f)]) &= d([\lambda \cdot a] + d, [\lambda \cdot b] + e, [\lambda \cdot c] + f)) \\ &= ([\lambda \cdot b] + e, 2[\lambda \cdot c] + 2f, 0) \\ &= \lambda \odot (b, 2c, 0) \oplus (e, 2f) \\ &= \lambda \odot d((a, b, c)) \oplus d((d, e, f)),\end{aligned}$$

por lo tanto sí es lineal

**Pregunta:** Mostrar que el mapa  $d \circ d$  es lineal.

**Solución:** Esto se deduce inmediatamente de Teorema 3.2.2, sin embargo si queremos se puede mostrar explícitamente (no lo haremos aquí para ahorrar escritura.)

**Pregunta:** Consideremos el mapa

$$i : V \rightarrow \mathbb{R}; (a, b, c) \mapsto i((a, b, c)) := a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c.$$

Comprobar la linealidad. De qué conjunto es  $i$  un elemento?

**Solución:** El cálculo de la linealidad es exactamente el mismo método que el anterior, así que para ahorrar el teclear sólo diremos la respuesta: sí lo es. Al ser un mapa lineal de  $V$  a  $\mathbb{R}$  es, por definición, un elemento de  $V^*$ .

**Preguntan:** Otra pregunta (multi)lineal. De nuevo no quiero seguir escribiendo esa comprobación, por lo que mejor ver [el vídeo](#) para la respuesta.

**Pregunta:** Comparar el mapa de arriba  $d : V \rightarrow V$  con el mapa  $\delta : P \rightarrow P$  de la sesión y construir el mapa lineal biyectivo  $j : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$d = j \circ \delta \circ j^{-1}.$$

**Solución:** Recordemos que  $\delta : P \rightarrow P$  está definido como una derivada, es decir  $\delta(p) = p'$ . Está claro que para esta pregunta queremos centrarnos en el mapa  $\delta : P_2 \rightarrow P_2$ . Recordemos la definición

$$P_2 := \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = a + bx + cx^2\},$$

y entonces tenemos

$$p'(x) = b + 2cx + 0x^2.$$

Vemos inmediatamente que esto se asemeja al mapa  $d : V \rightarrow V$  el cual actúa como  $d((a, b, c)) := (b, 2c, 0)$ . Sólo nos queda construir el mapa  $j : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Pensándolo un poco está claro que la respuesta es simplemente

$$j(p) := (a, b, c),$$

donde  $p = a + bx + cx^2$ . El mapa inverso  $j^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$  viene entonces dado simplemente por

$$(j^{-1}(a, b, c))(x) := a + bx + cx^2.$$

La sustitución directa nos da

$$((j \circ \delta \circ j^{-1})(a, b, c)) := (b, 2c, 0) =: d((a, b, c)).$$

Se pueden hacer ejercicios similares para comparar  $i : V \rightarrow \mathbb{R}$  to  $I : P \rightarrow \mathbb{R}$  dado en la clase (y también para el ejercicio anterior que no he escrito aquí.) Ver [el vídeo](#) para más detalles.



### 26.3.2 Índices

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $d$ . Consideremos dos mapas  $A$  y  $B$ , donde

$$A : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

$V$  tiene una base  $e_1, \dots, e_d$  y  $V^*$  tiene la base  $\epsilon^1, \dots, \epsilon^d$ .

**Pregunta:** Definir los componentes  $A^{ab}$  de  $A$  y  $B_{ab}$  de  $B$  con respecto a las bases dadas.

**Solución:** Simplemente usamos la dualidad de los elementos base, a saber  $e_i(\epsilon^j) = \delta_i^j = \epsilon^j(e_i)$ . Así pues, tenemos

$$A^{ab} = A(\epsilon^a, \epsilon^b), \quad \text{y} \quad B_{ab} = B(e_a, e_b).$$

**Pregunta:** Definimos  $A^{[ab]} := \frac{1}{2}(A^{ab} - A^{ba})$ . Mostrar que

$$A^{[ab]} = -A^{[ba]}$$

y también

$$A^{[ab]}B_{ab} = A^{ab}B_{[ab]}.$$

**Solución:** Por cálculo directo tenemos

$$A^{[ab]} := \frac{1}{2}(A^{ab} - A^{ba}) = -\frac{1}{2}(A^{ba} - A^{ab}) =: -A^{[ba]}.$$

Tenemos también

$$\begin{aligned} A^{[ab]}B_{ab} &:= \frac{1}{2}(A^{ab} - A^{ba})B_{ab} \\ &= \frac{1}{2}(A^{ab}B_{ab} - A^{ba}B_{ab}) \\ &= \frac{1}{2}(A^{ab}B_{ab} - A^{ab}B_{ba}) \\ &= A^{ab}\frac{1}{2}(B_{ab} - B_{ba}) \\ &=: A^{ab}B_{[ab]}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la convención de suma de Einstein para reetiquetar los índices ficticios del segundo término para llegar a la tercera línea.

**Pregunta:** Adicionalmente definimos  $B_{(ab)} := \frac{1}{2}(B_{ab} + B_{ba})$ . Ahora, mostrar que

$$B_{(ab)} = B_{(ba)}$$

y una vez más

$$A^{ab}B_{(ab)} = A^{(ab)}B_{ab}.$$

**Solución:** Seguir exactamente los pasos de la solución anterior.

**Pregunta:** Utilizando los resultados de las preguntas anteriores, podemos mostrar fácilmente

$$A^{[ab]}B_{(ab)} = 0,$$

es decir, la suma (contracción) de los índices simétricos y antisimétricos da como resultado cero.

**Solución:** Tenemos

$$\begin{aligned} A^{[ab]}B_{(ab)} &:= \frac{1}{2}(A^{ab}B_{(ab)} - A^{ba}B_{(ab)}) \\ &= \frac{1}{2}(A^{(ab)}B_{ab} - A^{(ba)}B_{ab}) \\ &= \frac{1}{2}(A^{(ab)}B_{ab} - A^{(ab)}B_{ab}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

### 26.3.3 Mapas Lineales Como Tensores

**Pregunta:** Dado un espacio vectorial  $V$  y un mapa lineal  $\phi : V^* \xrightarrow{\sim} V^*$  construir un tensor  $T_\phi$ -  $(1, 1)$ .

**Solución:** Sabemos que un tensor- $(1, 1)$  es un mapa lineal  $T_\phi : V^* \times V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ . Sabemos también que  $\psi \in V^*$  es un mapa  $\psi : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ . Está claro, por tanto, que definimos

$$T_\phi(\sigma, v) := (\phi(\sigma))(v),$$

donde  $\sigma \in V^*$  y  $v \in V$ .

**Pregunta:** Dado un tensor-  $(1, 1)$   $T : V^* \times V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ , construir un mapa lineal  $\phi_T : V^* \xrightarrow{\sim} V^*$ .

**Solución:** Esto es justo el ejercicio anterior al revés. es decir, definimos

$$(\phi_T(\sigma))(v) := T(\sigma, v),$$

que escribimos como

$$\phi_T(\sigma) := T(\sigma, \cdot).$$

**Pregunta:** Mostrar que

- (a)  $T_{\phi_T} = T$ , y
- (b)  $\phi_{T_\phi} = \phi$ .

**Solución:**

- (a) Tenemos

$$T_{\phi_T}(\sigma, v) := (\phi_T(\sigma))(v) =: T(\sigma, v).$$

- (b) Tenemos

$$(\phi_{T_\phi}(\sigma))(v) := T_\phi(\sigma, v) =: (\phi(\sigma))(v),$$

y entonces  $\phi_{T_\phi} = \phi$ .

**Pregunta:** Concluir que podemos considerar un mapa lineal  $\phi : V^* \xrightarrow{\sim} V^*$  como un tensor-  $(1, 1)$ .

**Solución:** Los ejercicios anteriores nos acaban de mostrar que existe un vínculo único entre  $T$  y  $\phi$  y por lo tanto podemos pensar que son isomorfos como mapas y como tal pueden ser vistos como el mismo objeto.

## 26.4 Variedades Diferenciales

### 26.4.1 Restricción Del Atlas

Sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{estándar}})$  un espacio topológico. Que además esté equipado con un atlas  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, x), (\mathbb{R}, y)\}$  donde  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; a \mapsto x(a) = a$  y  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; a \mapsto y(a) = a^3$ .

**Pregunta:** Construir el mapa de transición de cartas  $y \circ x^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y dar su clase de diferenciabilidad.

**Solución:** Tenemos  $x^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; a \mapsto x^{-1}(a) = a$ , y por tanto  $y \circ x^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; a \mapsto a^3$ . Esto es  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

**Pregunta:** Construir también el mapa de transición de cartas  $x \circ y^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Es  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{estándar}}, \mathcal{A})$  una variedad diferenciable?

**Solución:** Tenemos  $x \circ y^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; a \mapsto \sqrt[3]{a}$ , pero esta función ni siquiera es  $C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$  ya que la primera derivada es  $\frac{1}{3}a^{-2/3}$ , que explota a medida que  $a \rightarrow 0$ . Por tanto esta no es una variedad diferenciable.

**Pregunta:** Restringir el atlas  $\mathcal{A}$  a un atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  de manera que  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{estándar}}, \tilde{\mathcal{A}})$  sea una variedad suave.

**Solución:** El problema anterior proviene de los mapas de transición de las cartas. Los dos mapas de cartas en sí son  $C^\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$  y su dominio es toda la variedad (es decir  $\mathbb{R}$ ) y por lo tanto, si eliminamos una de las dos cartas obtenemos una variedad suave.

### 26.4.2 Cuadrados Suaves ("Soft Squares") en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Sea  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  equipado con la topología "cuadrado suave" ("Soft square topology")  $\mathcal{O}_{ssq}$  y un atlas  $\mathcal{A} = \{(U_n, x_n)\}$ , donde  $U_n = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| < n, |y| < n, n \in \mathbb{N}^+\}$  y

$$x_n : U_n \rightarrow x_n(U_n) \subset \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto x_n((x, y)) := \left( \frac{x+y}{2n}, \frac{x-y}{2n} \right).$$

**Pregunta:** Recordar la definición de una carta y mostrar que los  $(U_n, x_n)$  son de hecho cartas.

**Solución:** Para que  $(U_n, x_n)$  sean cartas, necesitamos mostrar que  $U_n \in \mathcal{O}_{ssq}$  y que las  $x_n$ s son homeomorfismos (es decir inevitables y continuas).

La topología del cuadrado suave se explica por sí misma, es el conjunto de cuadrados alrededor del origen sin la frontera. Esta es exactamente la definición de los  $U_n$  donde los lados de los  $U_n$  consecutivos aumentan en  $2n$ . Así que tenemos  $U_n \in \mathcal{O}_{ssq}$ .

A continuación tenemos que demostrar que los mapas gráficos son homeomorfos. Está claro que  $x_n$  es continua respecto a  $\mathcal{O}_{ssq}$  y  $\mathcal{O}_{textstd}$ . Así que sólo tenemos que comprobar que  $x_n^{-1}$  existe y es continua. Tenemos

$$x_n^{-1}(a, b) = (n(a+b), n(a-b)),$$

que es, una vez más, claramente continua.

Por lo tanto sabemos que  $(U_n, x_n)$  son de hecho cartas.

**Pregunta:** Mostrar que  $\mathcal{A}$  es un atlas  $-C^k$  construyendo explícitamente los mapas de transición de cartas. Qué es  $k$ ?

**Solución:** Los mapas de transición de cartas viene dados por

$$x_m \circ x_n^{-1} : x_n(U_n \cap U_m) \rightarrow x_m(U_n \cap U_m) \\ (a, b) \mapsto \left( \frac{na}{m}, \frac{nb}{m} \right) = \frac{n}{m}(a, b).$$

Esto nos dice que  $x_m \circ x_n^{-1} = \frac{n}{m} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}$ , que junto con  $m \neq 0$  nos da  $k = \infty$ .

**Pregunta:** Construir al menos otra carta que se encuentre en la extensión máxima de  $\mathcal{A}$  y demostrar que lo hace.

**Solución:** hay muchas, pero podríamos tomar el mapa  $\tilde{x} : U_5 \rightarrow \widetilde{U}_5 \subset \mathbb{R}^2; (a, b) \mapsto (a, b)$ , es decir, es el mapa identidad restringido a  $U_5$ . Está claro que este mapa será compatible  $C^\infty$  con cualquier carta solapada y por eso se encuentra en el atlas.

### 26.4.3 Análisis Multi-Dimensional Pregrado

*Nota del traductor:* recordemos la acepción de la palabra "undergraduate": nivel de estudios de los primeros cursos de grado

**Pregunta:** Hay una pregunta sobre el cálculo de las derivadas parciales. No la incluimos aquí porque es bastante sencilla.

### 26.4.4 Diferenciabilidad En Una Variedad

**Pregunta:** Hay una pregunta sobre cómo dibujar un diagrama para mostrar un montón de espacios y mapas diferentes. Llevará un tiempo dibujarlo en Tikz y hay muchos ejemplos en los propios apuntes, así que no lo hemos incluido aquí. A esto le sigue el cálculo de una derivada de un mapa, vale la pena ver este ejercicio, así que por favor [el vídeo](#).

## 26.5 Espacios Tangentes

### 26.5.1 Uso Virtuoso Del Símbolo $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$

**Pregunta:** mostrar que, para las cartas solapadas  $(U, x)$  y  $(V, y)$ , se tiene

$$\left(\frac{\partial x^a}{\partial y^m}\right)_p \left(\frac{\partial y^m}{\partial x^b}\right)_p = \delta_b^a$$

para cualquier  $p \in U \cap V$ .

**Solución:** Tenemos

$$\begin{aligned} \delta_b^a &= \left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right)_p (x^a) \\ &:= \partial_b(x^a \circ x^{-1})(x(p)) \\ &= \partial_b(x^a \circ (y^{-1} \circ y) \circ x^{-1})(x(p)) \\ &= \partial_b((x^a \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1}))(x(p)) \\ &= \partial_b(y^m \circ x^{-1})(x(p)) \cdot \partial_m(x^a \circ y^{-1})(y(p)) \\ &=: \left(\frac{\partial y^m}{\partial x^b}\right)_p \left(\frac{\partial x^a}{\partial y^m}\right)_p, \end{aligned}$$

donde hemos insertado la identidad, utilizado la asociatividad de la composición de mapas, y la regla de la cadena multidimensional junto con  $(y \circ x^{-1})(x(p)) = y(p)$ .

**Pregunta:** Después de insertar  $y^{-1} \circ y$ , donde  $y$  es otro mapa gráfico ("chart map") en el mismo dominio gráfico  $U$ , en la posición apropiada, en la definición del lado izquierdo de

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p = \left( \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \right)_p \left( \frac{\partial f}{\partial y^m} \right)_p,$$

utilizar la regla de la cadena multidimensional para demostrar que es igual al lado derecho

**Solución:** Esto sigue de manera similar a la pregunta anterior, por lo que no la escribiremos aquí.

**Pregunta:** Las tantas cantidades  $\dim \mathcal{M}$  definidas por el lado izquierdo de la expresión anterior constituyen los componentes de un tensor? Si es así, ¿cuál es la valencia y el rango del tensor?

**Solución:** la expresión anterior es claramente de la forma

$$T_{(x)i}(p) = \left( \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \right)_p T_{(y)m}(p),$$

que es la ley de transformación para los componentes de un tensor-  $(0, 1)$ . Por tanto la respuesta es "sí" y la valencia es  $(0, 1)$  y el rango es 1.

### 26.5.2 Transformación De Los Componentes De Un Vector

Sea el espacio topológico  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{st.})$  equipado con el atlas  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^2, x), (\mathbb{R}^2, y)\}$ , donde

$$x : (a, b) \mapsto (a, b) \quad \text{y} \quad y : (a, b) \mapsto (a, b + a^3).$$

**Pregunta:** Calcular los objetos  $\left( \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)_p$ !

**Solución:** Tenemos  $(x \circ y^{-1})((u, v)) = (u, v - u^3)$ , y así el cálculo directo nos da

$$\left( \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \right)_p := \partial_1(x^1 \circ y^{-1})(y(p)) = 1,$$

dónde hemos utilizado  $\partial_1(x \circ y^{-1})((u, v)) = 1$ , con independencia del valor que tome  $u$ .

A continuación tenemos,

$$\left( \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \right)_p := \partial_1(x^2 \circ y^{-1})(y(p)) = \partial_1(x^2 \circ y^{-1})((a, b + a^3)) = -3a^2,$$

donde hemos utilizado  $\partial_2(x^1 \circ y^{-1})((u, v)) = -2u^2$  junto con  $p = (a, b)$ .

Cálculos similares dan

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial y^2}\right)_p = 0, \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)_p = 1$$

(Reformulado ligeramente para ahorrar en la escritura) Recordemos que las componentes de la velocidad de una curva  $\gamma$  en una carta  $(U, x)$  en el punto  $p = \gamma(\lambda_0)$  vienen dadas por

$$\dot{\gamma}_x^i(\lambda_0) := (x \circ \gamma)'(\lambda_0).$$

Ahora consideremos la curva

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad \lambda \mapsto (\lambda, -\lambda).$$

**Pregunta:** Calcular los componentes  $\dot{\gamma}_x^i(\lambda_0)$  y  $\dot{\gamma}_y^i(\lambda_0)$ !

**Solución:** Tenemos  $(x \circ \gamma)(\lambda) = (\lambda, -\lambda)$  y  $(y \circ \gamma)(\lambda) = (\lambda, -\lambda + \lambda^3)$ , por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x^1(\lambda_0) &:= (x \circ \gamma)'(\lambda_0) = 1, \\ \dot{\gamma}_x^2(\lambda_0) &:= (x \circ \gamma)''(\lambda_0) = -1, \\ \dot{\gamma}_y^1(\lambda_0) &:= (y \circ \gamma)'(\lambda_0) = 1, \\ \dot{\gamma}_y^2(\lambda_0) &:= (y \circ \gamma)''(\lambda_0) = -1 + 3\lambda_0^2. \end{aligned}$$

**Preguntan:** Teniendo presentes los resultados anteriores, cómo podríamos haber obtenido los componentes de  $\dot{\gamma}_x^i(\lambda_0)$  a partir de  $\dot{\gamma}_y^i(\lambda_0)$ ?

**Solución:** La respuesta es claramente utilizar la propiedad de transformación

$$\dot{\gamma}_x^i(\lambda_0) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^m}\right)_p \dot{\gamma}_y^m(\lambda_0).$$

Es decir, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x^1(\lambda_0) &= \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\right)_p \dot{\gamma}_y^1(\lambda_0) + \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^2}\right)_p \dot{\gamma}_y^2(\lambda_0) \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1 + 3\lambda_0^2) \\ &= 1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x^2(\lambda_0) &= \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^1}\right)_p \dot{\gamma}_y^1(\lambda_0) + \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)_p \dot{\gamma}_y^2(\lambda_0) \\ &= -3\lambda_0^2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1 + 3\lambda_0^2) \\ &= -1. \end{aligned}$$

### 26.5.3 El Gradiente

Dada una función  $f$  en una variedad  $\mathcal{M}$ , los conjuntos de niveles de  $f$  para una constante  $c \in \mathbb{R}$  se definen como

$$N_c(f) := \{p \in \mathcal{M} \mid f(p) = c\}.$$

**Pregunta:** ¿Formular la condición para que una curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  tome valores únicamente en uno de los conjuntos de niveles de una función  $f$ !

**Solución:** Claramente queremos que  $(f \circ \gamma)(\lambda) = c$  para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Podemos formularlo como  $f \circ \gamma$  siendo equivalente a la función constante, que simplemente obedece a la propiedad anterior.

**Pregunta:** Demostrar ahora que el gradiente de la función aniquila el vector velocidad  $v_{\gamma,p}$  para cualquier  $\gamma$  a través de  $p$  en  $N_c(f)$ . En otras palabras, demostrar que

$$(df)_p(v_{\gamma,p}) = 0.$$

**Solución:** Tenemos

$$(df)_p(v_{\gamma,p}) := v_{\gamma,p}(f) := (f \circ \gamma)'(\lambda_0) = 0,$$

ya que la derivada de una constante desaparece.

#### 26.5.4 ¿Existe Una Suma De Curvas Bien Definida?

Sea la variedad topológica  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{st.})$  equipada con el atlas  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^2, x), (\mathbb{R}^2, y)\}$  donde

$$x : (a, b) \mapsto (a, b) \quad \text{y} \quad y : (a, b) \mapsto (a, b \cdot e^a).$$

**Pregunta:** Es  $\mathcal{A}$  un atlas-  $C^\infty$ ?

**Solución:** Necesitamos construir los mapas de transición de cartas

$$\begin{aligned} (x \circ y^{-1})(u, v) &= x((u, v \cdot e^{-u})) = (u, v \cdot e^{-u}) \\ (y \circ x^{-1})(u, v) &= y((u, v)) = (u, v \cdot e^u). \end{aligned}$$

Ambos son infinitamente diferenciables de forma continua, por lo que la respuesta es "sí".

**Pregunta:** En la  $\mathbb{R}^2$  anterior, considerar dos curvas  $\gamma, \delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por

$$\gamma : \lambda \mapsto (\lambda, 1), \quad \text{y} \quad \delta : \lambda \mapsto (1, \lambda).$$

Sin referirse a ninguna carta, ¿pueden dar la suma  $\gamma + \delta$  de estas curvas?



**Solución:** La respuesta es "no" porque nuestra variedad es justo el conjunto  $\mathbb{R}^2$  (con una topología) y por lo tanto no lleva ninguna estructura de espacio vectorial por lo que no podemos hablar de la adición en  $\mathbb{R}^2$ .

**Pregunta:** Calcular los representantes de ambas curvas con respecto a las dos cartas. Ilustrar los resultados. ¿Dónde se cruzan las curvas en las cartas?

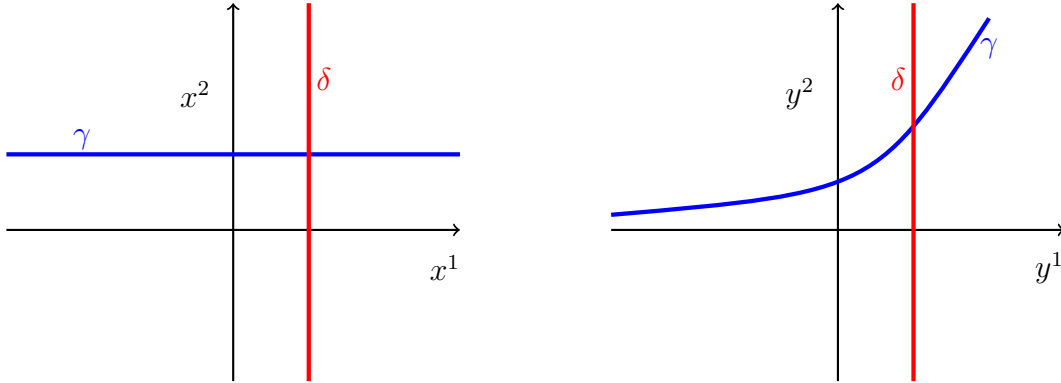
**Solución:** Consideremos primero la carta  $x$ . Tenemos

$$(x \circ \gamma)(\lambda) = (\lambda, 1), \quad \text{y} \quad (x \circ \delta)(\lambda) = (1, \lambda).$$

En la carta  $y$  tenemos

$$(y \circ \gamma)(\lambda) = (\lambda, e^\lambda), \quad \text{y} \quad (y \circ \delta)(\lambda) = (1, \lambda \cdot e).$$

las ilustraciones son las siguientes



Los puntos de intersección son  $(1, 1)$  en la carta  $x$  y  $(1, e)$  en la carta  $y$ . Ambos corresponden a  $\lambda = 1$ , lo que debe ser a partir de la definición de las curvas.

(Reformulado para ahorrar en la escritura) **Pregunta:** Utilizar la fórmula de las sesiones

$$\sigma_x : \mathbb{R} \rightarrow U; \quad \lambda \mapsto x^{-1}((x \circ \gamma)(\lambda + \lambda_0) + (x \circ \delta)(\lambda + \lambda_1) - (x \circ \gamma)(\lambda_0)),$$

donde  $\gamma(\lambda_0) = \delta(\lambda_1)$ , para hallar la suma  $\gamma + \delta$ . Hacer también el cálculo para  $\sigma_y(\lambda)$ .

**Solución:** Utilizando la pregunta anterior, el cálculo directo da: para la carta  $x$

$$\begin{aligned} \sigma_x(\lambda) &= x^{-1}((\lambda + 1, 1) + (1, \lambda + 1) - (1, 1)) \\ &= x^{-1}(\lambda + 1, \lambda + 1) \\ &= (\lambda + 1, \lambda + 1). \end{aligned}$$

El cálculo en la carta  $y$  da

$$\sigma_y(\lambda) = (\lambda + 1, 1 + \lambda \cdot e^{-\lambda}).$$

**Pregunta:** Mostrar que – a pesar de los resultados anteriores – la velocidad de  $\sigma_x$  y la velocidad  $\sigma_y$  son iguales en el punto de intersección.

**Solución:** El punto de intersección es  $(1, 1)$  en  $x$  y por eso se requiere que  $\lambda = 0$ . Usando esto, tenemos

$$\dot{\sigma}_{(x)x}^1 = 1 \quad \text{y} \quad \dot{\sigma}_{(x)x}^2 = 1,$$

ya que ambos son justamente la derivada con respecto a  $\lambda$  de  $\lambda + 1$ .

En la carta  $y$  tenemos (nótese que utilizamos la carta  $x$  para encontrar estos componentes con el fin de compararlos con los anteriores)

$$\dot{\sigma}_{(x)y}^1 = 1 \quad \text{y} \quad \dot{\sigma}_{(x)y}^2 = 1 \cdot e^0 - 0 \cdot e^0 = 1.$$

Tenemos por tanto

$$v_{\sigma_x, (1,1)} = \dot{\sigma}_{(x)x}^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \dot{\sigma}_{(x)y}^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = v_{\sigma_y, (1,1)}.$$

## 26.6 Campos

### 26.6.1 Campos Vectoriales Para Profesionales

**Pregunta:** Sea  $(U, x)$  una carta suave en una variedad suave  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ . Explicar por qué el mapa

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \rightarrow TU; \quad p \mapsto \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

es un campo vectorial en  $U$ .

**Solución:** Tenemos que comprobar que se trata de una sección. Es decir  $\pi \circ \frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ . Esto es claramente verdadero ya que  $\pi : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  está definido como

$$\pi : \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \mapsto p.$$

Ahora tenemos que comprobar si esta sección es suave. Si marcamos el mapa gráfico en  $TU$  como  $\xi_x$ , es decir, tenemos que comprobar que

$$\xi_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i} \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \xi(TU)$$

es suave. Recordando la definición de  $\xi_x$ , y utilizando el hecho de que la única componente no evanescente de  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  es la entrada  $i^{\text{th}}$ , tenemos

$$\left( \xi_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i} \circ x^{-1} \right) (\alpha^1, \dots, \alpha^d) = (\alpha^1, \dots, \alpha^d, 0, \dots, 1, \dots, 0),$$

donde el 1 aparece en la  $(d + i)$ -ésima entrada. Esto es claramente suave (con respecto a las topologías estándar en  $\mathbb{R}^d$  y  $\mathbb{R}^{2d}$ ), y por eso  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  es un campo vectorial en  $U$ .

### 26.6.2 El Haz Cotangente $T^*\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$

Consideramos el espacio total *haz cotangente*  $T^*\mathcal{M}$  como la unión disjunta

$$T^*\mathcal{M} := \dot{\bigcup}_{p \in \mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M}$$

de todos los espacios cotangentes y definimos el mapa de proyección del haz

$$\begin{aligned} \pi : T^*\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ \omega &\mapsto \text{el único } p \text{ con } \omega \in T_p^*\mathcal{M}. \end{aligned}$$

**Pregunta:** Mostrar que

$$\mathcal{O}_{T^*\mathcal{M}} := \{\text{preim}_\pi(U) \mid U \in \mathcal{O}_\mathcal{M}\}$$

define una topología en  $T^*\mathcal{M}$ .

**Solución:** Comprobamos las tres condiciones de una topología en el orden indicado en la definición.

(i) Tenemos

$$\text{preim}_\pi(\emptyset) = \emptyset, \quad \text{y} \quad \text{preim}_\pi(\mathcal{M}) = T^*\mathcal{M},$$

y entonces  $\emptyset, T^*\mathcal{M} \in \mathcal{O}_{T^*\mathcal{M}}$ .

(ii) Esto se deduce de las propiedades de la preimagen, a saber

$$\text{preim}_f(U \cap V) = \text{preim}_f(U) \cap \text{preim}_f(V).$$

(iii) Esto se deduce de otra propiedad de la preimagen, a saber

$$\bigcup_i \text{preim}_f(U_i) = \text{preim}_f\left(\bigcup_i U_i\right).$$

El resto de este tutorial consiste básicamente en los mismos cálculos que los de la conferencia. Específicamente encontrar los componentes de  $\xi_x^*$ , su inversa y mostrar que los mapas de transición cartas son suaves.

## 26.7 Conexiones

### 26.7.1 Reglas Prácticas sobre Cómo Actúa $\nabla$

**Pregunta:** ¿Cuál es el resultado de las siguientes aplicaciones de una derivada covariante libre de torsión?

- Hay algunos otros en el vídeo, pero están básicamente cubiertos en las conferencias, así que no los repetiremos aquí.
- $(\nabla_{[m}A)_{n]}$ ,
- $(\nabla_{[m}\omega)_{nr]}$ .

**Solución:** Tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla_{[m}A)_{n]} &:= \frac{1}{2} [(\nabla_m A)_n - (\nabla_n A)_m] \\ &= \frac{1}{2} (A_{n,m} - \Gamma^r_{nm} A_r - A_{m,n} + \Gamma^r_{mn} A_r) \\ &= A_{[n,m]} + \Gamma^r_{[mn]} \\ &= \frac{1}{2} F_{mn}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que  $\nabla$  es libre de torsión y por eso  $\Gamma^a_{[bc]} = 0$ .

A continuación, tenemos

$$(\nabla_{[m}\omega)_{nr]} = \frac{1}{3!} [(\nabla_m \omega)_{nr} - (\nabla_m \omega)_{rn} + (\nabla_r \omega)_{mn} - (\nabla_r \omega)_{nm} + (\nabla_n \omega)_{rm} - (\nabla_n \omega)_{mr}].$$

Si ampliamos esto veremos que las  $\Gamma$ s se cancelan todas, por ejemplo

$$\begin{aligned} (\nabla_m \omega)_{nr} - (\nabla_n \omega)_{mr} &= \omega_{nr,m} - \Gamma^s_{nm} \omega_{sr} - \Gamma^s_{rm} \omega_{ns} - \omega_{mr,n} + \Gamma^s_{mn} \omega_{sr} + \Gamma^s_{rn} \omega_{ms} \\ &= \omega_{nr,m} - \omega_{mr,n} + 2\Gamma^s_{[mn]} \omega_{sr} + 2\Gamma^s_{r[n} \omega_{m]s} \\ &= \omega_{nr,m} - \omega_{mr,n} + 2\Gamma^s_{r[n} \omega_{m]s}, \end{aligned}$$

y las otras  $\Gamma$  se cancelarán con otra expansión de términos. Por tanto nos queda

$$(\nabla_{[m}\omega)_{nr]} = \omega_{[nr,m]}.$$

### 26.7.2 Coeficientes de Conexión

Hay una pregunta sobre la declaración de las leyes de transformación de cartas de las  $\Gamma$ s y la declaración de qué clase de transformaciones hacen que las  $\Gamma$ s parezcan tensores. Hemos discutido esto en las notas ya, pero este cuadro es sólo para recordar a los lectores volver a leer Observación 7.3.1 ya que es un punto importante que a

menudo se pasa por alto.

**Pregunta:** Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$  el plano liso. Consideremos dos cartas que cubren ambas el semiplano superior, es decir, todos los puntos  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  con  $b > 0$ , una representando las coordenadas cartesianas conocidas y la otra las coordenadas polares conocidas en él.

Ya sabemos que el mapa de transición de coordenadas cartesianas a polares viene dado por

$$y \circ x^{-1}(a, b) = \left( \sqrt{a^2 + b^2}, \arccos \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right),$$

mientras que el mapa de transición inverso de polares a cartesianas viene dado por

$$x \circ y^{-1}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad \text{para } r \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \varphi \in (0, \pi).$$

Partiendo de la suposición de que las funciones de los coeficientes de conexión desaparecen en la carta cartesiana, calcular las funciones de los coeficientes de conexión  $\Gamma_{(y)bc}^a$  con respecto a la carta en polares!

**Solución:** Recordemos que la ley de transformación es

$$\Gamma_{(y)bc}^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^b \partial y^c} + \frac{\partial y^a}{\partial x^k} \frac{\partial x^n}{\partial y^b} \frac{\partial x^m}{\partial y^c} \Gamma_{(x)mn}^k.$$

Suponemos que  $\Gamma_{(x)sp}^q = 0$ , y por lo tanto sólo tenemos que encontrar el primer término. Tenemos

$$\left( \frac{\partial x^k}{\partial y^c} \right)_{y^{-1}(r, \varphi)} := \partial_c (x^k \circ y^{-1})(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}_c^k.$$

Ahora, utilizando la primera pregunta del tutorial de espacios tangentes anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial y^a}{\partial x^k} \right)_p &= \left( \frac{\partial x^k}{\partial y^a} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}_a^k \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}_a^k, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que el determinante de la primera matriz es  $r$ . También

podemos calcular

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial^2 x^1}{\partial y^1 \partial y^1} \right)_{y^{-1}(r, \varphi)} &= 0 \\
 \left( \frac{\partial^2 x^1}{\partial y^2 \partial y^1} \right)_{y^{-1}(r, \varphi)} &= -\sin \varphi \\
 \left( \frac{\partial^2 x^1}{\partial y^1 \partial y^2} \right)_{y^{-1}(r, \varphi)} &= -\sin \varphi \\
 \left( \frac{\partial^2 x^1}{\partial y^2 \partial y^2} \right)_{y^{-1}(r, \varphi)} &= -r \cos \varphi \\
 \left( \frac{\partial^2 x^2}{\partial y^1 \partial y^1} \right)_{y^{-1}(r, \varphi)} &= 0 \\
 \left( \frac{\partial^2 x^2}{\partial y^2 \partial y^1} \right)_{y^{-1}(r, \varphi)} &= \cos \varphi \\
 \left( \frac{\partial^2 x^2}{\partial y^2 \partial y^2} \right)_{y^{-1}(r, \varphi)} &= -r \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

A continuación, sólo tenemos que elegir las expresiones pertinentes para encontrar las  $\Gamma_{(y)bc}^a$ . Por ejemplo

$$\Gamma_{(y)11}^1 = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \frac{\partial^2 x^1}{\partial y^1 \partial y^1} + \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 x^2}{\partial y^1 \partial y^1} = 0,$$

y

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{(y)22}^1 &= \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \frac{\partial^2 x^1}{\partial y^2 \partial y^2} + \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 x^2}{\partial y^2 \partial y^2} \\
 &= \cos \varphi (-r \cos \varphi) + \sin \varphi (-r \sin \varphi) \\
 &= -r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\
 &= -r.
 \end{aligned}$$

## 26.8 Transporte Paralelo Y Curvatura

### 26.8.1 Donde Aparecen Los Coeficientes De Conexión

**Pregunta:** Determinar los coeficientes del tensor de Riemann respecto a una carta  $(U, x)$  en términos de las funciones de los coeficientes de conexión.

**Solución:** Recordemos la definición

$$\text{Riem}(\omega, Z, X, Y) := \omega : \left( \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \right).$$

Ya hemos visto<sup>1</sup> que Riem es lineal-  $C^\infty$  en todas sus entradas y, por lo tanto, sólo podemos considerar los elementos de la base. Es decir, podemos establecer (utilizando la notación

<sup>1</sup>O más correctamente, lo han mostrado como un ejercicio en la sesión 8.

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\omega = dx^i, \quad Z = \partial_j, \quad X = \partial_k, \quad y \quad Y = \partial_m.$$

Por tanto tenemos

$$\begin{aligned} \text{Riem}(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_m) &:= dx^i : \left( \nabla_k \nabla_m \partial_j - \nabla_m \nabla_k \partial_j - \nabla_{[\partial_k, \partial_m]} \partial_j \right) \\ &= dx^i : \left[ \nabla_k (\Gamma_{(x)jm}^r \partial_r) - \nabla_m (\Gamma_{(x)jk}^r \partial_r) \right] \\ &= dx^i : \left[ \Gamma_{(x)jm,k}^r \partial_r + \Gamma_{(x)jm}^r \Gamma_{(x)rk}^s \partial_s - \Gamma_{(x)jk,m}^r \partial_r - \Gamma_{(x)jk}^r \Gamma_{(x)rm}^s \partial_s \right] \\ \text{Riem}_{jkm}^i &= \Gamma_{(x)jm,k}^i - \Gamma_{(x)jk,m}^i + \Gamma_{(x)jm}^r \Gamma_{(x)rk}^i - \Gamma_{(x)jk}^r \Gamma_{(x)rm}^i. \end{aligned}$$

Podemos ver la antisimetría en las dos últimas entradas inmediatamente deducido de lo anterior. Es decir  $\text{Riem}_{jkm}^i = -\text{Riem}_{jmk}^i$ .

**Pregunta:** ¿Tiene curvatura una variedad unidimensional con conexión? ¿Por qué?

**Solución:** No, ya que si es unidimensional sólo tenemos una  $\Gamma$ , concretamente  $\Gamma_{11}^1$ , y si ponemos esto en la definición anterior, la única componente  $\text{Riem}_{111}^1$  desaparece totalmente y por tanto no hay curvatura.

Desde el punto de vista geométrico, esto tiene sentido si pensamos en incrustar la variedad unidimensional en un espacio de mayor dimensión. Siempre podemos "tirar" de la variedad unidimensional en línea recta y demostrar así que no tiene curvatura intrínseca.

### 26.8.2 La Esfera Redonda

Hay una pregunta sobre cómo encontrar los componentes de Riem para unas  $\Gamma$ s dadas. No voy a escribirlo aquí para ahorrarme tiempo, pero recomiendo al menos ver el vídeo (disponible [aquí](#), por alguna razón este vídeo no está en YouTube) para un cálculo trabajado.

### 26.8.3 Cómo No definir El Transporte Paralelo

**Pregunta:** Hänschen define dos vectores  $X \in T_p \mathcal{M}$  e  $Y \in T_q \mathcal{M}$  como paralelos si

$$X_{(x)}^i = Y_{(x)}^i$$

con respecto a una carta  $(U, x)$  cuyo dominio  $U$  contiene tanto  $p$  como  $q$ . Demostrar que este concepto de paralelismo está mal definido!

**Solución:** Considerar la transformación a otra carta con el mismo dominio  $(U, y)$ ,

$$X_{(y)}^i = \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_p X_{(x)}^j = \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_p Y_{(x)}^j = \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_p \left( \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \right)_q Y_{(y)}^k,$$

pero dado que  $p \neq q$  no podemos, en general, utilizar

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_p \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right)_q = \delta_k^i,$$

y por eso

$$X_{(y)}^i \neq Y_{(y)}^i.$$

A continuación, hay un diagrama que muestra cómo la definición anterior de paralelismo falla para los vectores paralelos (como se define en la sesión) alrededor de un círculo, cuando se considera en la carta cartesiana y la carta polar.

Para ahorrarme tiempo no he dibujado los diagramas aquí, pero si no pueden imaginar las imágenes en tu cabeza, ¡vuelvan a ver el vídeo!

## 26.11 Variedades Métricas

### 26.11.1 Reconocer & Tratar Con Diferentes Firmas

**Pregunta:** (reformulada) Enunciar las posibles firmas de una métrica  $g$  para el siguiente conjunto de vectores  $g$ -nulos:

- (i) Un cono a través del origen,
- (ii) Un punto en el,
- (iii) Una línea recta a través del origen, y
- (iv) Un plano a través del origen,

donde el origen es el origen del espacio vectorial, es decir, el punto  $p \in \mathcal{M}$  al que somos tangentes.

**Solución:** Sin pérdida de generalidad, supongamos que el espacio vectorial es tridimensional e introduzcamos una base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Las ecuaciones relevantes que dan las superficies correctas son

- (i)  $g(X, X) = -(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 0$ , tenemos por tanto  $(-, +, +)$ , o de forma equivalente  $(+, -, -)$ .
- (ii)  $g(X, X) = 0$  únicamente para el vector cero, y por eso necesitamos  $(+, +, +)$  or  $(-, -, -)$ .
- (iii) Del caso anterior, sólo necesitamos que una de las las entradas sea 0, es decir  $(0, +, +)/(0, -, -)$ , ya que entonces todos los vectores con un solo componente  $e^1$  son nulos.
- (iv) Extendiendo el caso anterior, tenemos  $(0, 0, +)/(0, 0, -)$ .



### 26.11.2 Conexión Levi-Civita

**Pregunta:** Expandir en términos de funciones de coeficiente de conexión

- (i)  $(\nabla_a g)_{bc}$ ,
- (ii)  $(\nabla_b g)_{ca}$ ,
- (iii)  $(\nabla_c g)_{ab}$ .

**Solución:** Sólo hacemos el primero, ya que los otros dos se obtienen simplemente reetiquetando los índices. Tenemos

$$(\nabla_a g)_{bc} = g_{bc,a} - \Gamma^m_{ba} g_{mc} - \Gamma^m_{ca} g_{bm}.$$

**Pregunta:** Sumando y/o restando (i), (ii) y (iii) de forma inteligente, obtenemos

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(g^{-1})^{am}(g_{mc,b} + g_{mb,c} - g_{bc,m})$$

y concluir que  $\nabla g = 0$  y  $T = 0$  (torsión) determinan de forma única las funciones de coeficiente de conexión en términos de la métrica.

**Solución:** Consideremos (i)+(ii)-(iii),

$$g_{bc,a} - \Gamma^m_{ba} g_{mc} - \Gamma^m_{ca} g_{bm} + g_{ca,b} - \Gamma^m_{cb} g_{ma} - \Gamma^m_{ab} g_{cm} - g_{ab,c} + \Gamma^m_{ac} g_{mb} + \Gamma^m_{bc} g_{am}.$$

Ahora bien, si consideramos una conexión compatible con la métrica y una torsión que desaparece, tenemos que lo anterior desaparece (ya que cada uno de los puntos (i), (ii) y (iii) desaparecen por sí mismos) y que las  $\Gamma$ s son simétricas en los dos índices inferiores. Utilizando también el hecho de que la métrica es simétrica, tenemos

$$0 = g_{bc,a} + g_{ac,b} - g_{ab,c} - 2\Gamma^m_{ba} g_{mc},$$

lo cual después de reorganizarlo  $g_{mc} g^{-1})^{cn} = \delta_m^n$  tenemos

$$\Gamma^n_{ba} = \frac{1}{2}(g^{-1})^{cn}(g_{bc,a} + g_{ac,b} - g_{ab,c}),$$

lo cual, re-etiquetando  $n \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow m$  da

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(g^{-1})^{ma}(g_{bm,c} + g_{cm,b} - g_{cb,m})$$

que es el resultado (cuando se usan las simetrías). Así pues, vemos que las funciones de coeficiente de conexión están determinadas de forma única por las componentes métricas dadas las condiciones anteriores.

### 26.11.3 Manejando La Función Longitud

**Pregunta:** Sea  $\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathcal{M}$  una curva suave en una variedad suave  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ . Consideremos ahora una segunda curva  $\tilde{\gamma} : (0, 1) \rightarrow \mathcal{M}$  definida por

$$\tilde{\gamma}(\lambda) = \gamma(\sigma(\lambda)),$$

donde  $\sigma : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  es una función suave biyectiva creciente. Demostrar que la longitud de ambas curvas es la misma:

$$L[\tilde{\gamma}] = L[\gamma].$$

**Solución:** Utilizando

$$\mathcal{L}[\gamma] = \sqrt{g(v_\gamma, v_\gamma)}, \quad \text{y} \quad \dot{\tilde{\gamma}}^a(\lambda) = (x^a \circ \gamma)'(\lambda),$$

e introduciendo la notación

$$\tilde{\lambda} := \sigma(\lambda), \quad \implies \quad \tilde{\gamma}(\lambda) = \gamma(\tilde{\lambda}),$$

tenemos

$$\begin{aligned} L[\tilde{\gamma}] &:= \int_0^1 d\lambda \sqrt{g(v_{\tilde{\gamma}}, v_{\tilde{\gamma}})} \\ &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{ab}(\tilde{\gamma}(\lambda)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}^a(\lambda) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}^b(\lambda)} \\ &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{ab}(\gamma(\tilde{\lambda})) \cdot (x^a \circ \gamma \circ \sigma)'(\lambda) \cdot (x^b \circ \gamma \circ \sigma)'(\lambda)} \\ &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{ab}(\gamma(\tilde{\lambda})) \cdot (x^a \circ \gamma)'(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\sigma}(\lambda) \cdot (x^b \circ \gamma)'(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\sigma}(\lambda)} \\ &= \int_0^1 d\lambda \dot{\sigma}(\lambda) \sqrt{g_{ab}(\gamma(\tilde{\lambda})) \cdot \dot{\gamma}^a(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\gamma}^b(\tilde{\lambda})} \\ &= \int_0^1 d\tilde{\lambda} \sqrt{g_{ab}(\gamma(\tilde{\lambda})) \cdot \dot{\gamma}^a(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\gamma}^b(\tilde{\lambda})} \\ &= L[\gamma], \end{aligned}$$

donde hemos usado la regla de la cadena, siendo el resultado  $d\tilde{\lambda} = \dot{\sigma}d\lambda$ .

**Pregunta:** Demostrar que las ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano  $\mathcal{T}$  tienen precisamente las mismas soluciones que las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano  $\mathcal{L} := \sqrt{\mathcal{T}}$ , si de este último sólo se seleccionan aquellas soluciones que satisfacen la condición  $\mathcal{T} = 1$  en su parametrización.

**Solución:** Marquemos las variables canónicas en  $t$  y  $q$ , entonces las ecuaciones Euler-Lagrange para  $\mathcal{L}$  rezan así

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^a} = 0.$$

Sustituyendo en  $\mathcal{L} := \sqrt{\mathcal{T}}$ , y utilizando el supuesto de que sólo consideramos las soluciones donde  $\mathcal{T} = 1$ , y por lo tanto esta es una constante con respecto a  $t$ , tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \sqrt{\mathcal{T}}}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial \sqrt{\mathcal{T}}}{\partial q^a} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{T}}} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{T}}} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q^a} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{T}}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q^a} \right], \end{aligned}$$

lo cual simplificando  $1/2\sqrt{\mathcal{T}}$  nos da la respuesta.

#### 26.11.4 Una Forma Práctica De Determinar Rápidamente Los Símbolos De Christoffel

**Pregunta:** Deducir la ecuación geodésica para la esfera redonda bidimensional de radio  $R$ , cuya métrica en una carta  $(U, x)$  viene dada por

$$g_{ab}(x^{-1}(\vartheta, \phi)) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

mediante una adecuada ecuación Euler-Lagrange. Para aligerar la notación, podemos definir

$$\vartheta(\lambda) := (x^1 \circ \gamma)(\lambda), \quad \text{y} \quad \phi(\lambda) := (x^2 \circ \gamma)(\lambda).$$

**Solución:** Tenemos  $\mathcal{L}[\gamma] := \sqrt{g(v_\gamma, v_\gamma)}$ , pero la pregunta anterior nos mostró que podemos considerar en cambio  $\mathcal{T} := g(v_\gamma, v_\gamma) = g_{ab} \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b$  ni nos restringimos en la parametrización a  $\mathcal{T} = 1$ . Para nuestros componentes métricos, tenemos

$$\mathcal{T} = R^2 \cdot \dot{\vartheta}(\lambda) \cdot \dot{\vartheta}(\lambda) + R^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\phi}(\lambda) \cdot \dot{\phi}(\lambda).$$

Insertando esto en nuestras ecuaciones Euler-Lagrange, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \vartheta} &= 2R^2 (\ddot{\vartheta}(\lambda) - \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \dot{\phi}^2(\lambda)) \\ \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \phi} &= 2R^2 \sin \vartheta (\sin \vartheta \cdot \ddot{\phi}(\lambda) + 2 \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} \cdot \dot{\phi}) \end{aligned}$$

que se simplifica en

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}(\lambda) - \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \dot{\phi}^2(\lambda) &= 0 \\ \ddot{\phi} + 2 \cot \vartheta \cdot \dot{\vartheta} \cdot \dot{\phi} &= 0. \end{aligned}$$

Estas son las ecuaciones geodésicas para nuestra esfera redonda de radio  $R$ .

**Pregunta:** Leer las funciones de coeficientes de conexión inducidas por la métrica para la esfera redonda.

**Solución:** Comparando el resultado anterior con la ecuación geodésica para los coeficientes de conexión inducidos por la métrica,

$$\ddot{\gamma}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{\gamma}^b \dot{\gamma}^c,$$

vemos de inmediato que

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \text{y} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cot \vartheta,$$

con el resto de  $\Gamma$ s desapareciendo. Nótese que en la segunda expresión no hay 2 ya que lo distribuimos entre  $\Gamma_{12}^2$  y  $\Gamma_{21}^2$ .

### 26.11.5 Propiedades Del Tensor de Riemann-Christoffel

**Pregunta:** Demostrar que los campos de base inducidos por cartas actúan sobre las funciones de coeficientes como

$$\frac{\partial}{\partial x^c} (g^{-1})^{ab} = -(g^{-1})^{ar} (g^{-1})^{bs} \frac{\partial}{\partial x^c} g_{rs}.$$

**Solución:** Utilizando  $(g^{-1})^{ab} g_{bs} = \delta_s^a$ , tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^c} \delta_s^a \\ &= \frac{\partial}{\partial x^c} \left( (g^{-1})^{ab} g_{bs} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x^c} (g^{-1})^{ab} \right) g_{bs} + (g^{-1})^{ab} \left( \frac{\partial}{\partial x^c} g_{bs} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^c} (g^{-1})^{ar} + (g^{-1})^{sr} (g^{-1})^{ab} \left( \frac{\partial}{\partial x^c} g_{bs} \right) \end{aligned}$$

lo cual, después de reetiquetar y reordenar nos da el resultado.

**Pregunta:** Utilizar las coordenadas normales para encontrar una expresión para el tensor de Riemann-Christoffel

$$R_{abcd} = g_{ak} R^k_{bcd}$$

en un punto dado  $p$  en términos de  $g_{ab}$  y sus derivadas de primer y segundo orden en ese mismo punto.

**Solución:** Esto es sólo un largo cálculo que implica la regla del producto y el uso del hecho de que en coordenadas normales todos los  $\Gamma$ s desaparecen. El cálculo completo se da

en el vídeo. El resultado es

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}(g_{ad,bc} - g_{bd,ac} + g_{ac,bd} - g_{bc,ad}),$$

donde

$$g_{ab,cd} := \frac{\partial^2 g_{ab}}{\partial x^c \partial x^d}.$$

**Pregunta:** Mostrar — en coordenadas normales — que  $R_{abcd} = -R_{bacd}$ .

**Solución:** Intercambiando los índices  $a \leftrightarrow b$  en el resultado del ejercicio anterior tenemos

$$R_{bacd} = \frac{1}{2}(g_{bd,ac} - g_{ad,bc} + g_{bc,ad} - g_{ac,bd}) = -\frac{1}{2}(g_{ad,bc} - g_{bd,ac} + g_{ac,bd} - g_{bc,ad}) = -R_{abcd}.$$

**Pregunta:** de forma similar, mostrar que  $R_{abcd} = R_{cdab}$ .

**Solución:** De nuevo, intercambiar los índices y se obtiene el resultado.

**Pregunta:** Mostrar que  $R_{a[bcd]} = 0$  para el tensor de Riemann-Christoffel.

**Solución:** Tenemos

$$R_{a[bcd]} := \frac{1}{3!}(R_{abcd} - R_{abdc} + R_{acdb} - R_{acbd} + R_{adbc} - R_{adcb}).$$

Entonces, utilizando las dos preguntas anteriores, también tenemos

$$R_{abcd} = R_{cdab} = -R_{dcab} = -R_{abdc}.$$

Siguiendo esto con los otros arreglos de índices, obtenemos

$$R_{a[bcd]} = \frac{1}{3}(R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc}).$$

Si a continuación introducimos la expansión en términos de  $g_{ab}$  y sus derivadas, podemos demostrar que todo se cancela y obtenemos el resultado.

## 26.12 Simetría

### 26.12.1 Retroceso y Avance

(Pull-Back y Push-Forward)

*en adelante usaremos indistintamente los términos pull-back y push-forward en inglés o español*

**Pregunta:** Consideremos un mapa suave  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  entre dos variedades diferenciales. Mostrar que una función  $f \in C^\infty(\mathcal{N})$ , el retroceso del gradiente de  $f$  es igual al gradiente del retroceso de  $f$ , es decir,

$$\phi^*(df) = d(\phi^*f).$$

**Solución:** Por definición, tenemos

$$(\phi_*X)\langle f \rangle = X\langle f \circ \phi \rangle,$$

para  $X \in T\mathcal{M}$ , dando

$$\begin{aligned} \phi^*(df) : X &:= df : \phi_*(X) \\ &= \phi_*X\langle f \rangle \\ &= X\langle f \circ \phi \rangle \\ &= d(f \circ \phi) : X \\ &=: d(\phi^*f) : X, \end{aligned}$$

que se mantiene para  $X$  arbitrario y, por tanto, demuestra el resultado.

**Pregunta:** El avance  $\phi_* : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}$  es un mapa lineal entre haces tangentes ("tangent bundles"). Calcular sus funciones componentes

$$\phi_*^a_b := dy^a : \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^b} \right)$$

con respecto a las cartas  $(U \subset \mathcal{M}, x)$  y  $(V \subset \mathcal{N}, y)$ !

**Solución:** Si consideráramos un vector general y un gradiente, tendríamos

$$df : \phi_*X = \phi_*X\langle f \rangle = X\langle f \circ \phi \rangle = X^i \left( \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x^i} \right).$$

Ahora tenemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x^i} \right)_p &:= \partial_i(f \circ \phi \circ x^{-1})|_{x(p)} \\ &= \partial_i(f \circ y^{-1} \circ y \circ \phi \circ x^{-1})|_{x(p)} \\ &= \partial_j(f \circ y^{-1})|_{(y \circ \phi \circ x^{-1} \circ x)(p)} \cdot \partial_i(y^j \circ \phi \circ x^{-1})|_{x(p)} \\ &=: \left( \frac{\partial f}{\partial y^j} \right)_q \cdot \left( \frac{\partial(y^j \circ \phi)}{\partial x^i} \right)_p, \end{aligned}$$

donde  $q := \phi(p) \in \mathcal{N}$ . Ahora hacemos  $f = y^a$  y  $X = \frac{\partial}{\partial x^b}$ , dando

$$\begin{aligned}\phi_*^a{}_b(p) &= \left( \frac{\partial y^a}{\partial y^j} \right)_q \cdot \left( \frac{\partial (y^j \circ \phi)}{\partial x^b} \right)_p \\ &= \delta_j^a \cdot \left( \frac{\partial (y^j \circ \phi)}{\partial x^b} \right)_p \\ &= \left( \frac{\partial (y \circ \phi)^a}{\partial x^b} \right)_p.\end{aligned}$$

**Pregunta:** Mostrar que las funciones componentes del pull back  $\phi^*g$  del campo tensorial métrico se obtienen a partir de las funciones componentes de  $g$  mediante

$$(\phi^*g)_{ab}(p) = \left( \frac{\partial (y \circ \phi)^m}{\partial x^a} \right)_p \left( \frac{\partial (y \circ \phi)^n}{\partial x^b} \right)_p g_{mn}(\phi(p)).$$

**Solución:** Teniendo en cuenta la definición de la métrica inducida, tenemos

$$\begin{aligned}(\phi^*g)(X, Y) &= g(\phi_*X, \phi_*Y) \\ &= g_{ab}(\phi_*X)^a(\phi_*Y)^b \\ &= g_{ab}(dy^a : \phi_*X)(dy^b : \phi_*Y).\end{aligned}$$

Entonces si usamos  $g_{ab} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right)$  junto con los resultados del ejercicio anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}(\phi^*g)_{ab}(p) &= g_{mn}(q) \cdot \left[ dy^m : \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^a} \right) \right](p) \cdot \left[ dy^n : \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^b} \right) \right](p) \\ &= \left( \frac{\partial (y \circ \phi)^m}{\partial x^a} \right)_p \left( \frac{\partial (y \circ \phi)^n}{\partial x^b} \right)_p g_{mn}(\phi(p)).\end{aligned}$$

### 26.12.2 Derivada Lie—La Forma Pedestre

**Pregunta:** Consideremos la incrustación suave  $\iota : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $(S^2, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  en  $(\mathbb{R}^3, \mathcal{O}_{st}, \mathcal{B})$ , la cual para la carta familiar  $(U, x) \in \mathcal{A}$  y  $(\mathbb{R}^3, y = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3}) \in \mathcal{B}$  viene dada por

$$y \circ \iota \circ x^{-1} : (\vartheta, \varphi) \mapsto (a \cos \varphi \sin \vartheta, b \sin \varphi \sin \vartheta, c \cos \vartheta),$$

donde  $a, b$  y  $c$  son números reales positivos. Qué se puede decir sobre la forma de  $\iota(S^2)$ ?

**Solución:** Nada, ya que para hablar de forma se necesita una derivada covariante o una métrica, y no tenemos ninguna de las dos. Supongo que se podría decir que es alguna forma bidimensional cerrada y compacta, pero no se podría especificar cuál, es decir, si es una esfera redonda o un elipsoide o una patata.

**Pregunta:** Supongamos ahora que  $(\mathbb{R}^3, \mathcal{O}_{st}, \mathcal{B})$  está dotado además de la métrica euclidiana  $g$ , cuyos componentes con respecto a la carta  $(\mathbb{R}^3, y)$  son dados por

$$g_{ab}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{para cualquier } p \in U.$$

Escribir las funciones de los componentes de  $g^{\text{elipsoide}} := \iota^*g$  con respecto a la carta  $(U, x)$ !

**Solución:** Utilizando el resultado de las preguntas anteriores, tenemos que hallar

$$\left( \frac{\partial(y \circ \iota)^m}{\partial x^a} \right)_p := \partial_a (y^m \circ \iota \circ x^{-1})|_{x(p)}.$$

Utilizando la definición dada, tenemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial(y \circ \iota)^1}{\partial x^1} \right)_p &= a \cos \varphi \cos \vartheta, & \left( \frac{\partial(y \circ \iota)^1}{\partial x^2} \right)_p &= -a \sin \varphi \sin \vartheta \\ \left( \frac{\partial(y \circ \iota)^2}{\partial x^1} \right)_p &= b \sin \varphi \cos \vartheta, & \left( \frac{\partial(y \circ \iota)^2}{\partial x^2} \right)_p &= b \cos \varphi \sin \vartheta \\ \left( \frac{\partial(y \circ \iota)^3}{\partial x^1} \right)_p &= -c \sin \vartheta, & \left( \frac{\partial(y \circ \iota)^3}{\partial x^2} \right)_p &= 0. \end{aligned}$$

Se insertan entonces los términos relevantes, dando

$$\begin{aligned} g_{11}^{\text{elipsoide}} &= a^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + c^2 \sin^2 \vartheta \\ g_{22}^{\text{elipsoide}} &= a^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta, \end{aligned}$$

$$\text{y } g_{12}^{\text{elipsoide}} = 0 = g_{21}^{\text{elipsoide}}.$$

**Pregunta:** Por conveniencia, designamos por  $(\vartheta, \varphi)$  las funciones coordenadas  $(x^1, x^2)$ . Comprobar que los campos vectoriales

$$\begin{aligned} X_1(p) &= -\sin \varphi(p) \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)_p - \cot \vartheta(p) \cos \varphi(p) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_p \\ X_2(p) &= \cos \varphi(p) \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)_p - \cot \vartheta(p) \sin \varphi(p) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_p \\ X_3(p) &= \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_p \end{aligned}$$

constituyen un subálgebra de Lie de  $(\Gamma TS^2, [\cdot, \cdot])$  y determinar las constantes de estructura!



**Solución:** Sea  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$  una función arbitraria. Tenemos que considerar la acción de las expresiones del corchete de Lie sobre  $f$ , e.g.  $[X_1, X_2]\langle f \rangle$ . Usamos el ingenioso truco de que en esta expansión sólo quedarán los términos en los que una derivada actúe sobre un término de las  $X$ . Es decir, cualquier término que sea derivada de segundo orden de  $f$  se desvanecerá porque aparecerá tanto en  $X_1\langle X_2\langle f \rangle \rangle$  como en  $X_2\langle X_1\langle f \rangle \rangle$  que el orden cambió, pero la derivada parcial conmuta y así estos términos se cancelan.

Entonces tenemos (dejando de lado los  $\vartheta$ s por razones de notación)

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]\langle f \rangle &:= X_1\langle X_2\langle f \rangle \rangle - X_2\langle X_1\langle f \rangle \rangle \\ &= \left[ (-\operatorname{cosec}^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cot^2 \vartheta \cos^2 \varphi) \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \cot \vartheta \cos \varphi \sin \varphi \left( \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) \right] \\ &\quad - \left[ (\operatorname{cosec}^2 \vartheta \cos^2 \varphi - \cot^2 \vartheta \sin^2 \varphi) \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \cot \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) \right] \\ &= (\cot^2 \vartheta - \operatorname{cosec}^2 \vartheta) \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \\ &= - \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \langle f \rangle \\ &= -X_3\langle f \rangle \\ \implies [X_2, X_1] &= X_3, \end{aligned}$$

donde en la última línea hemos utilizado la antisimetría del corchete de Lie.

A continuación tenemos

$$\begin{aligned} [X_1, X_3]\langle f \rangle &= 0 - \left[ -\cos \varphi \left( \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \cot \vartheta \sin \varphi \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= X_2\langle f \rangle \\ \implies [X_1, X_3] &= X_2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [X_3, X_2] &= \left[ -\sin \varphi \left( \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) - \cot \vartheta \cos \varphi \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right] - 0 \\ &= X_1\langle f \rangle \\ \implies [X_3, X_2] &= X_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto vemos que  $\{X_1, X_2, X_3\}$  están encerradas dentro del corchete de Lie, y por tanto forman un subálgebra de Lie. Las constantes de estructura son

$$C^3_{21} = C^2_{13} = C^1_{32} = 1,$$

y las otras constantes de estructura no relacionadas (es decir, no  $C^3_{12} = -C^3_{21}$ , etc.) desaparecen.

Nótese que los resultados nos dicen que  $\{X_1, X_2, X_3\}$  es un álgebra de rotación tridimensional, como se define en la conferencia. Por lo tanto, esperamos que sea una simetría de  $S^2$ , lo que mostramos explícitamente a continuación para  $X_3$ .

**Pregunta:** Calcular la curva integral de  $X_3$  en el punto  $p = x^{-1}(\vartheta_0, \varphi_0)$ , es decir, la curva  $\gamma_p$  que satisface

$$\gamma_p(0) = p, \quad \text{y} \quad v_{\gamma_p, \gamma_p(\lambda)} = (X_3)_{\gamma_p(\lambda)}$$

en la carta  $(U, x)$ !

**Solución:** Utilizando

$$v_{\gamma_p, \gamma_p(\lambda)} = (X_3)_{\gamma_p(\lambda)} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\gamma}_{p(x)}^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma_p(\lambda)} = \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_{\gamma_p(\lambda)},$$

tenemos

$$\dot{\gamma}_{p(x)}^1(\lambda) := (x^1 \circ \gamma_p)'(\lambda) = 0, \quad \text{y} \quad \dot{\gamma}_{p(x)}^2(\lambda) := (x^2 \circ \gamma_p)'(\lambda) = 1,$$

de lo cual

$$\vartheta(\gamma_p) = a, \quad \text{y} \quad \varphi(\gamma_p) = \lambda + b,$$

para las constantes  $a$  y  $b$ . De la pregunta vemos que  $a = \vartheta_0$  y  $b = \varphi_0$ . Por lo que tenemos

$$\gamma_{p(x)}(\lambda) = (\vartheta_0, \lambda + \varphi_0),$$

que cumple

$$\gamma_p(0) = x^{-1}(\gamma_{p(x)}(0)) = x^{-1}(\vartheta_0, \varphi_0) = p.$$

**Pregunta:** Las curvas integrales  $\gamma_p$  dan lugar a una familia de mapas suaves de un parámetro  $h_\lambda^{X_3} : S^2 \rightarrow S^2$ . Calcular el pull-back

$$\left( h_\lambda^{X_3} \right)^* g^{\text{elipsoide}}$$

de la métrica en  $S^2$ . Qué se puede concluir sobre la derivada de Lie  $\mathcal{L}_{X_3} g^{\text{elipsoide}}$ ?

**Solución:** El flujo es

$$h_\lambda^{X_3} : p \mapsto \gamma_p(\lambda),$$

por lo que tenemos

$$\left( x^m \circ h_\lambda^{X_3} \circ x^{-1} \right) : (\vartheta, \varphi) \mapsto \gamma_p^m(\lambda),$$

y entonces

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial(x \circ h_\lambda^{X_3})^1}{\partial x^1} \right)_p &:= \partial_1 \left( x^1 \circ h_\lambda^{X_3} \circ x^{-1} \right) \Big|_{x(p)} = \vartheta_0 \\ \left( \frac{\partial(x \circ h_\lambda^{X_3})^1}{\partial x^2} \right)_p &:= \partial_2 \left( x^1 \circ h_\lambda^{X_3} \circ x^{-1} \right) \Big|_{x(p)} = 0 \\ \left( \frac{\partial(x \circ h_\lambda^{X_3})^2}{\partial x^1} \right)_p &:= \partial_1 \left( x^2 \circ h_\lambda^{X_3} \circ x^{-1} \right) \Big|_{x(p)} = 0 \\ \left( \frac{\partial(x \circ h_\lambda^{X_3})^2}{\partial x^2} \right)_p &:= \partial_2 \left( x^2 \circ h_\lambda^{X_3} \circ x^{-1} \right) \Big|_{x(p)} = \lambda + \varphi_0. \end{aligned}$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} \left[ \left( h_{\lambda}^{X_3} \right)^* g^{\text{elipsoide}} \right]_{11} (p) &= \vartheta_0^2 g_{11}^{\text{elipsoide}} (\gamma_p(\lambda)) \\ \left[ \left( h_{\lambda}^{X_3} \right)^* g^{\text{elipsoide}} \right]_{22} (p) &= (\lambda + \varphi_0)^2 g_{22}^{\text{elipsoide}} (\gamma_p(\lambda)) \end{aligned}$$

y de nuevo los otros dos componentes desaparecen. Si entonces tomamos la transformación de coordenadas

$$\vartheta \rightarrow \frac{1}{\vartheta_0} \vartheta, \quad \text{y} \quad \varphi \rightarrow \frac{1}{\lambda + \varphi_0} \varphi,$$

lo cual podemos hacer, ya que  $\vartheta_0, \varphi_0 > 0$  (ya que los rangos de  $\vartheta$  y  $\varphi$  son positivos), obtenemos entonces

$$\left[ \left( h_{\lambda}^{X_3} \right)^* g^{\text{elipsoide}} \right]_{ab} (p) = g_{ab}^{\text{elipsoide}} (\gamma_p(\lambda)),$$

o más elegante

$$\left( h_{\lambda}^{X_3} \right)^* g^{\text{elipsoide}} = g^{\text{elipsoide}}.$$

esto nos dice que  $X_3$  es una simetría de la métrica, y por eso  $\mathcal{L}_{X_3} g^{\text{elipsoide}} = 0$ .

## 26.13 Integración

### 26.13.1 Integrales & Volúmenes

**Pregunta:** calcular el volumen de la esfera redonda  $S^2$  de radio  $R$ , es decir,

$$\text{vol}(S^2) = \int_{S^2} 1.$$

**Solución:** Lo primero que debemos tener en cuenta es que "volumen" no significa aquí lo que intuitivamente pensamos, es decir el 3-volumen euclidiano, sino que significa lo que normalmente llamaríamos el "área de la superficie". Esta distinción proviene de la métrica que estamos utilizando, la métrica sobre  $S^2$  en sí misma o la métrica euclidiana con una esfera de radio  $R$  incrustada en ella. Una vez hecha esta distinción el cálculo es trivial, consideremos el gráfico con

$$(x^1, x^2) = (\vartheta, \varphi), \text{ entonces}$$

$$g_{(x)ab} (x^{-1}(\vartheta, \varphi)) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad \implies \quad g := \det (g_{(x)ab}) (x^{-1}(\vartheta, \varphi)) = R^4 \sin^2 \vartheta$$

y así

$$\begin{aligned} \int_{S^2} 1 &:= \int_{x(S^2)} d^2 x \sqrt{g} 1 \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta |R^2 \sin^2 \vartheta| \\ &= 4\pi R^2, \end{aligned}$$

que es lo que esperábamos.

Técnicamente tenemos que incluir otra carta, ya que  $x(S^2)$  perderá dos puntos antípodas y una geodésica que los conecta, sin embargo esto no contribuirá en nada al volumen ya que, sólo consideraríamos esta línea (la partición de la unidad eliminando la región de solapamiento), que no tiene "espesor" y por lo tanto no tiene volumen. Por ejemplo, si la línea que falta es la línea de longitud que une los polos norte y sur, tendríamos

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta R^2 \sin \vartheta = 0,$$

donde  $\varphi_0$  es el valor de  $\varphi$  a lo largo de la línea de longitud.

## 26.14 Espaciotiempo De Schwarzschild

### 26.14.1 Geodésicas En Un Espaciotiempo De Schwarzschild

Se da la métrica de Schwarzschild y se nos dice que utilicemos la notación de "mano ligera"

$$t(\lambda) := (x^0 \circ \gamma)(\lambda),$$

y de forma similar para  $r(\lambda)$ ,  $\theta(\lambda)$  y  $\varphi(\lambda)$ , donde  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U$  es una cierta curva.

**Pregunta:** Escribir el Lagrangiano  $\mathcal{L} := g_{ab}\dot{\gamma}^a\dot{\gamma}^b$ !

**Solución:** Utilizando la métrica dada en la pregunta (ver el vídeo si no lo conocen) tenemos

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2.$$

**Pregunta:** Encontrar la ecuación de Euler-Lagrange con respecto a  $t(\lambda)$ !

**Solución:** Vemos de inmediato que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

tenemos también

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \ddot{t} + \frac{4GM}{r^2} \dot{r} \dot{t},$$

que da la ecuación de Euler-Lagrange

$$\ddot{t} + \frac{2GM}{r^2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)} \dot{r} \dot{t} = 0$$

**Pregunta:** Mostrar que la derivada de Lie de  $g$  con respecto al campo vectorial  $K_t := \frac{\partial}{\partial t}$  desaparece. Qué significa esto?

**Solución:** tenemos

$$(\mathcal{L}_{K_t}g)_{ab} = K_t \langle g_{ab} \rangle + g_{mb} \frac{\partial}{\partial x^a} (K_t)^m + g_{ab} \frac{\partial}{\partial x^b} (K_t)^m = 0,$$

ya que los tres términos desaparecen. Esto nos dice que  $K_t$  es una simetría de la métrica. En efecto, el espaciotiempo de Schwarzschild es estacionario (e incluso estático), cuyas definiciones se dan en la sesión 16. Veremos que esta simetría es la conservación de la energía.

**Pregunta:** La forma exacta de la cantidad conservada viene dada por  $(K_t)_a (x^a)'(\lambda) = \text{const.}$  (sin demostración). Deducir una expresión para la cantidad  $t'(\lambda)$  que aparece en el Lagrangiano!

**Solución:** Usando  $(K_t)_a := g_{ab}(K_t)^b$ , tenemos

$$g_{ab}(K_t)^b (x^a)'(\lambda) = g_{00} t'(\lambda) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) t'(\lambda) = \text{const.}$$

Dejando que  $\sqrt{E}$  sea la constante, tenemos

$$t'(\lambda) = \frac{r\sqrt{E}}{r - 2GM}$$

**Pregunta:** Por otra parte, podemos encontrar la llamada "simetría esférica", es decir, la derivada de Lie de  $g$  con respecto a los campos vectoriales ya conocidos

$$\begin{aligned} X_1 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ X_2 &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

desaparece. ¿Qué magnitud física es conservada por esta simetría?

**Solución:** El momento angular.

**Pregunta:** Debido a  $X_1$  y  $X_2$  (sin demostración), se puede fijar el movimiento a un plano de constante  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . ¿Cómo se puede deducir una expresión para el término restante  $\varphi'(\lambda)$ ?

**Solución:** De las dos preguntas anteriores, tenemos

$$\text{const.} = g_{ab} X_3^b (x^a)'(\lambda) = g_{33} \varphi'(\lambda) = -r^2 \sin^2 \theta \varphi'(\lambda),$$

entonces usando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y etiquetando la constante  $J$ , tenemos

$$\varphi'(\lambda) = \frac{J}{r^2}.$$

**Pregunta:** Utilizar todo el hecho de que  $\mathcal{L} = 1$  en la parametrización. ¡Insertar los resultados obtenidos anteriormente y llevar todos los términos que no contengan  $E$  a un lado!

**Solución:** En primer lugar, obsérvese que hemos sustituido los puntos por signos prima, y también que  $\theta' = 0$  ya que  $\theta$  es una constante. Tenemos por tanto

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{E}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} (r')^2 - r^2 \frac{J^2}{r^4},$$

que puede ser reorganizado así

$$E = (r')^2 + 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{J^2}{r^2} - \frac{2GMJ^2}{r^3}.$$

**Pregunta:** ¿Pueden interpretar los términos que aparecen en esta expresión?

**Solución:** Si consideramos entonces una partícula de masa  $m = 1$ , vemos que la fórmula anterior representa

- $E$  es la energía total,
- $(r')^2$  es la energía cinética,
- 1 es la masa,
- $-\frac{2GM}{r}$  es el potencial gravitacional Newtoniano,
- $\frac{J^2}{r^2}$  es una contribución del momento angular, y
- $-\frac{2GMJ^2}{r^3}$  es un término de corrección de la RG.

### 26.14.2 Desplazamiento Al Rojo Gravitacional

Consideremos un espaciotiempo dotado de la métrica de Schwarzschild, así como dos observadores 1 y 2 en reposo en sus respectivos sistemas de referencia ( $\dot{r} = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ ). Los observadores sentados en los mismos  $\theta$  y  $\varphi$  siendo  $r_1 < r_2$ .

**Pregunta:** ¡Deducir una expresión para  $t'(\lambda)$  usando el Lagrangiano del ejercicio anterior!

**Solución:** Usando  $1 = \mathcal{L} = g_{ab} \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b$ , obtenemos

$$t'(\lambda) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1/2}.$$

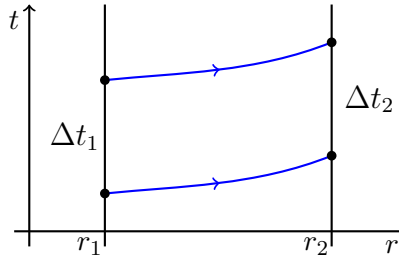
**Pregunta:** El observador 1 emite fotones que el observador 2 detecta. La distancia entre las dos emisiones de fotones es  $\Delta\lambda_1$ . Hallar el hueco  $\Delta\lambda_2$  que ve el observador 2.

**Solución:** Tenemos

$$\Delta t_1 = \left(1 - \frac{2GM}{r_1}\right)^{-1/2} \Delta\lambda_1$$

$$\Delta t_2 = \left(1 - \frac{2GM}{r_2}\right)^{-1/2} \Delta\lambda_2.$$

Entonces, utilizamos el hecho de que  $K_t$  era un campo vectorial de Killing, y por lo tanto el camino tomado por los dos fotones emitidos es el mismo, aparte de un desplazamiento temporal constante.



Como muestra el diagrama anterior, la condición de Killing nos dice básicamente que  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ , y así obtenemos

$$\Delta\lambda_2 = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{r_2}}{1 - \frac{2GM}{r_1}}} \Delta\lambda_1$$

**Pregunta:** Consideremos la relación de frecuencias  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ . ¿Qué sucede para el observador 2 que está aproximadamente en el infinito? ¿Qué sucede cuando se envía  $r_1$  al radio de Schwarzschild  $r_s = 2GM$ ?

**Solución:** Podemos pensar que  $\Delta\lambda$  es el periodo de tiempo (tiempo entre dos fotones emitidos) y entonces la frecuencia (que es el recíproco del periodo de tiempo) es

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\Delta\lambda_2}{\Delta\lambda_1} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{r_2}}{1 - \frac{2GM}{r_1}}}.$$

Dado que  $r_1 < r_2$ , lo anterior nos dice que  $\omega_2 < \omega_1$ . En términos de longitud de onda, esto es  $\mu_1 < \mu_2$  (hemos usado  $\mu$  para la longitud de onda ya que  $\lambda$  ya se ha usado arriba), lo que nos dice que la luz ha sido *desplazada al rojo*. Esto se ve también en la definición de desplazamiento al rojo,

$$1 + z = \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

donde  $z > 0$  es el desplazamiento al rojo y  $z < 0$  es desplazamiento al azul.

Para  $r_2 \rightarrow \infty$  tenemos

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow \left(1 - \frac{2GM}{r_1}\right)^{-1/2}.$$

Para  $r_1 \rightarrow r_s$ , tenemos

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow \infty,$$

lo cual significa que  $\omega_1 \rightarrow \infty$ . En términos de longitud de onda, esto indica  $\mu_2 \rightarrow \infty$ , y por tanto la luz es desplazada infinitamente. Esto es la así llamada *superficie de desplazamiento al rojo infinito*.

Este resultado es en realidad engañoso, ya que sólo se mantiene debido a la elección del marco de referencia. Hemos tomado como tiempo de coordenadas el del marco de reposo del agujero negro. Si utilizamos el reloj de un observador en caída para definir el tiempo de coordenadas, este comportamiento de corrimiento al rojo infinito desaparece. He discutido esto con más detalle en las notas que he puesto en mi blog site.

## 26.15 Espaciotiempo Relativista, Materia Y Gravitación

### 26.15.1 Ley de la fuerza de Lorentz

**Pregunta:** Recordemos de la sesión que para una partícula acoplada al potencial electromagnético, tenemos

$$m(\nabla_{v_\gamma} v_\gamma)^a = qF^a_b v_\gamma^b,$$

donde  $v_\gamma$  es la velocidad d una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ .

Ahora descomponer "1 + 3" esta ecuación en componentes con respecto al marco de un observador.

**Solución:** El observador  $(\delta, e)$  tiene un marco tal que

$$g(e_a, e_b) = \eta_{ab}, \quad \text{y} \quad e_0(\lambda) = v_{\delta, \delta(\lambda)}.$$

Entonces tenemos

$$m(\nabla_{v_\gamma} v_\gamma)^a = qF^{ac} \eta_{cb} v_\gamma^b,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} m(\nabla_{v_\gamma} v_\gamma)^0 &= qF^{00} v_\gamma^0 + \sum_{\beta=1}^3 qF^{0\beta} v_\gamma^\beta \\ m(\nabla_{v_\gamma} v_\gamma)^\alpha &= -qF^{\alpha 0} v_\gamma^0 - \sum_{\beta=1}^3 qF^{\alpha\beta} v_\gamma^\beta. \end{aligned}$$



**Pregunta:** Usando las definiciones  $E_\alpha := F_{\alpha 0}$  para el campo eléctrico y  $B^\alpha := \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$  para el campo magnético visto por un observador, llevar la parte derecha de la ecuación anterior a la forma familiar de la ley de la fuerza de Lorentz para una partícula de carga  $q$  y velocidad espacial

$$\mathbf{v} := \left( \frac{e^\alpha : v_\delta}{e^0 : v_\delta} \right) e_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3 \text{ y atención: el denominador fue olvidado en las sesiones})$$

que el observador detecta para la partícula.

*Pista:*  $(a \times b)^\alpha = g^{\alpha\mu}\varepsilon_{\mu\rho\sigma}a^\rho b^\sigma$ ,  $\varepsilon_{123} = 1$  y  $\varepsilon^{123} = 1$ .

**Solución:** Establecemos

$$\mathcal{F}^\alpha = m(\nabla_{v_\delta} v_\delta)^\alpha = qF^\alpha_b v_\delta^b,$$

donde  $\mathcal{F}$  es la fuerza de Lorentz, hasta algunos factores. Podemos dividir el lado derecho en dos términos, uno para  $b = 0$  y otro para  $b = \beta$ . Para el primero observamos que

$$\eta^{\alpha\beta}E_\beta = \eta^{\alpha\beta}F_{\beta 0} = F^\alpha_0,$$

entonces, usando  $\epsilon^0 : (v_\delta) = v_\delta^0$ , el primer término es simplemente

$$q\eta^{\alpha\beta}E_\beta(\epsilon^0 : v_\delta).$$

El segundo término necesita un poco más de trabajo, pero empezamos usando la pista: utilizando  $g^{ab} = \eta^{ab}$  en el marco de los observadores, tenemos

$$(v_\delta \times B)^\alpha = \eta^{\alpha\mu}\varepsilon_{\mu\rho\sigma}v_\delta^\rho B^\sigma := \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}\varepsilon_{\mu\rho\sigma}\varepsilon^{\sigma\nu\tau}v_\delta^\rho F_{\nu\tau}.$$

Vemos que  $\eta^{\alpha\mu}$  nos indica que  $\mu = \alpha$  en el símbolo de Levi-Civita. Por definición, los únicos términos en la derecha que no desaparecen, entonces, tienen  $\rho \neq \sigma \neq \alpha$ . Consideremos el caso para  $\alpha = 1$  (los otros dos siguen análogamente)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\eta^{1\mu}\varepsilon_{\mu\rho\sigma}\varepsilon^{\sigma\nu\tau}F_{\nu\tau}v_\delta^\rho &= \frac{1}{2}\varepsilon_{123}(\varepsilon^{312}F_{12} + \varepsilon^{321}F_{21})v_\delta^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{132}(\varepsilon^{213}F_{13} + \varepsilon^{231}F_{31})v_\delta^3 \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{123}(\varepsilon^{123}F_{12} + (-\varepsilon^{123})(-F_{12}))v_\delta^2 + \frac{1}{2}(-\varepsilon_{123})((- \varepsilon^{123})F_{13} + \varepsilon^{123}(-F_{13}))v_\delta^3 \\ &= F_{12}v_\delta^2 + F_{13}v_\delta^3, \end{aligned}$$

en que hemos indicado dónde se han utilizado las antisimetrías de  $\varepsilon$  y  $F$ , y también hemos utilizado  $\varepsilon_{123} = 1 = \varepsilon^{123}$ . Esto se generaliza a

$$\frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}\varepsilon_{\mu\rho\sigma}\varepsilon^{\sigma\nu\tau}F_{\nu\tau}v_\delta^\rho = \eta^{\alpha\sigma}F_{\sigma\beta}v_\delta^\beta = F^\alpha_\beta v_\delta^\beta,$$

donde observamos el hecho de que  $F_{\alpha\alpha} = 0$  debido a la antisimetría.

Así que el segundo término de nuestra ecuación de fuerza de Lorentz es simplemente

$$qF^\alpha_\beta v_\delta^\beta = q(v_\delta \times B)^\alpha,$$

dando

$$\mathcal{F}^\alpha = q\eta^{\alpha\beta}E_\beta(\epsilon^0 : v_\delta) + q(v_\delta \times B)^\alpha.$$

Finalmente, vemos que

$$\frac{1}{(\epsilon^0 : v_\delta)}(v_\delta \times B)^\alpha = (\mathbf{v} \times B)^\alpha,$$

al igual que en todas partes en el cálculo anterior obtendremos términos como

$$\frac{v_\delta^\rho}{(\epsilon^0 : v_\delta)} = \frac{(\epsilon^\rho : v_\delta)}{(\epsilon^0 : v_\delta)} =: \mathbf{v}^\rho.$$

Esto nos da la forma que queremos en el lado derecho, es decir

$$\frac{1}{(\epsilon^0 : v_\delta)}\mathcal{F}^\alpha = q\eta^{\alpha\beta}E_\beta + q(\mathbf{v} \times B)^\alpha.$$

### 26.15.2 ¿Qué Curvatura Puede Aparecer En Las Ecuaciones De Einstein?

En esta pregunta se pide demostrar que la identidad diferencial de Bianchi se mantiene para el tensor de Riemann. Esto se entregó como un ejercicio en la sesión.

Si el lector no pudiera resolverlo, [este enlace](#) debería ser útil. Obsérvese que la notación es ligeramente diferente en el enlace, pero por supuesto la respuesta es la misma.

No he incluido este enlace en las notas para evitar la tentación de buscar la respuesta.

**Pregunta:** La versión anterior sin componentes puede escribirse de forma equivalente como

$$R^w_{zab;c} + R^w_{zbc;a} + R^w_{zca;b} = 0.$$

Utilizando este resultado, demostrar que mediante las contracciones adecuadas se obtiene

$$(\nabla_a G)^{ab} = 0.$$

**Solución:** Primero utilizar la antisimetría para

$$R^w_{zab;c} + R^w_{zbc;a} + R^w_{zca;b} = R^w_{zab;c} + R^w_{zbc;a} - R^w_{zac;b}.$$

Ahora, usamos el hecho de que  $\nabla$  es compatible con la métrica y el resultado

$$g^{av}g_{vw} = \delta^a_w$$

para dar

$$\begin{aligned} g^{av}g_{vw}(R^w_{zab;c} + R^w_{zbc;a} + R^w_{zca;b}) &= R^a_{zab;c} + R^a_{zbc;a} - R^a_{zac;b} \\ &= R_{zb;c} - R_{zc;b} + R^a_{zbc;a}. \end{aligned}$$

Entonces contraemos con  $g^{bz}$  junto con los resultados  $R_{z^a bc} = -R^a_{zbc}$ <sup>2</sup> and  $R := g^{ab}R_{ab}$  para dar

$$\begin{aligned} g^{bz}(R_{zb;c} - R_{zc;b} + R^a_{zbc;a}) &= R_{;c} - R^b_{c;b} - R^{ba}_{bc;a} \\ &= R_{;c} - R^b_{c;b} - R^a_{c;a} \\ &= R_{;c} - 2R^b_{c;b}. \end{aligned}$$

Finalmente utilizando el hecho de que el tensor de Ricci es simétrico,<sup>3</sup> y contrayendo con  $g^{ac}$ , tenemos (después de reetiquetar)

$$(\nabla_a G)^{ab} = R^{ab}_{;a} - \left(\frac{1}{2}g^{ab}R\right)_{;a} = 0.$$

## 26.20 Cosmología

### 26.20.1 Ecuación de Killing

**Pregunta:** Mostrar que un campo vectorial  $K$  es Killing si, y solo si,

$$(\nabla_a K)_b + (\nabla_b K)_a = 0.$$

**Solución:** Si han hecho el ejercicio en las notas para mostrar

$$g(\nabla_X K, Y) + g(X, \nabla_Y K) = 0,$$

esta pregunta se deduce trivialmente al establecer  $X = \partial_a$  y  $Y = \partial_b$ :

$$0 = g_{cb}(\nabla_a K)^c + g_{ac}(\nabla_b K)^c =: (\nabla_a K)_b + (\nabla_b K)_a.$$

Si no hicieron ese ejercicio, vuelvan a hacerlo, pero también pueden ver [el vídeo](#) para un método que tenga en cuenta los componentes.

Este resultado es conocido como la ecuación de Killing.

### 26.20.2 Edad Del Universo...

El tensor energía-momento para un fluido perfecto es

$$T^{ab} := [\rho(t) + p(t)]u^a u^b + g^{ab}p(t),$$

donde  $u^a = (1, 0, 0, 0)^a$  son las funciones componentes de un campo vectorial suave y  $g_{ab}$  son las de una métrica FRW con respecto a la carta coordenada  $(t, r, \vartheta, \phi)$  empleada en las clases.

<sup>2</sup>Esencialmente mostramos este resultado en el tutorial 9 (mostramos  $R_{abcd} = -R_{bacd}$ ).

<sup>3</sup>Este resultado es obtenido a partir de  $R_{abcd} = R_{cdab}$ , poniendo entonces  $a = c$  y subiendo el primer índice de nuevo.

**Pregunta:** Deducir la ecuación de la conservación

$$\dot{\rho}(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho(t) + p(t))$$

evaluando la condición

$$(\nabla_a T)^{ab} u_b = 0,$$

que se deduce de las ecuaciones de Einstein en virtud de la identidad diferencial de Bianchi.

**Solución:** Tenemos

$$(\nabla_a T)^{ab} u_b = (\nabla_a T)^{a0},$$

ya que  $u_b = (1, 0, 0, 0)_b$ . Entonces usando  $T^{a0} = 0$  y  $T^{00} = \rho(t)$  tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla_a T)^{ab} u_b &= T^{a0}_{,a} + \Gamma^a_{na} T^{n0} + \Gamma^0_{na} T^{an} \\ &= \dot{\rho}(t) + \Gamma^a_{0a} \rho(t) + \Gamma^0_{na} T^{an}. \end{aligned}$$

Ahora usamos los resultados de la sesión,

$$\Gamma^\alpha_{0\alpha} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^\alpha_\alpha = 3\frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma^0_{\alpha\beta} = a\dot{a}\gamma_{\alpha\beta},$$

y las otras  $\Gamma$ s desaparecen. Esto da

$$(\nabla_a T)^{ab} u_b = \dot{\rho}(t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho(t) + a\dot{a}\gamma_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}.$$

Usando a continuación  $T^{\alpha\beta} = p(t)$  y  $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{a^2}\gamma^{\alpha\beta}$  obtenemos

$$0 = \dot{\rho}(t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho(t) + \frac{\dot{a}}{a}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}p(t),$$

lo que nos da el resultado.

**Pregunta:** Para  $p(t) = \omega\rho(t)$ , resolver la ecuación de la conservación anterior para  $\rho$  y utilizar la ecuación Friedmann con curvatura espacial evanescente

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho,$$

para deducir una ecuación diferencial autónoma para  $a$ .

**Solución:** Tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= -3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(1 + \omega)\rho(t) \\ \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} &= -3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(1 + \omega) \\ \frac{d}{dt} \ln(\rho(t)) &= -3(1 + \omega)\frac{d}{dt} \ln(a(t)) \\ \rho(t) &= Ba^{-3(1+\omega)}, \end{aligned}$$

para una constante  $B = e^A$ , donde  $A$  es la constante de integración. Si introducimos esto en la expresión dada en la pregunta tenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi GB}{3} a^{-3(1+\omega)},$$

que es una ecuación diferencial autónoma para  $a$ .

**Pregunta:** Mostrar que

$$a(t) = C \cdot t^\alpha, \quad C = \text{const}$$

resuelve la ecuación diferencial autónoma para el factor de escala  $a$  si  $\omega \neq 1$  y una selección adecuada de  $\alpha$ .

**Solución:** Por cálculo directo, tenemos

$$\alpha^2 t^{-2} = \frac{8\pi GBC}{3} t^{-3\alpha(1+\omega)},$$

con lo que vemos

$$\alpha = \frac{2}{3(1+\omega)}.$$

**Pregunta:** Usar el resultado de la pregunta anterior para escribir una ecuación para  $H(t) := \frac{\dot{a}}{a}$  y estimar la edad del universo sólo lleno de polvo para el valor actual de la constante de Hubble que viene dada por  $\frac{1}{H_0} \approx 13 \times 10^9$  años. Repetir el cálculo para un universo que sólo contiene radiación.

**Solución:** Tenemos

$$a(t) = C \cdot t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad \implies \quad H(t) = \frac{2}{3(1+\omega)} t^{-1}.$$

Por lo que la edad viene dada por

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)} \frac{1}{H_0}.$$

Para polvo  $\omega = 0$  y entonces tenemos

$$t_0^{\text{polvo}} \approx 8.6 \times 10^9 \text{ años.}$$

Para radiación,  $\omega = \frac{1}{3}$ , dando

$$t_0^{\text{radiación}} \approx 6.5 \times 10^9 \text{ años.}$$

**Pregunta:** Consideremos un universo lleno de un solo tipo de materia caracterizado por una ecuación de estado lineal con constante  $\omega$ . ¿Para qué valores de ésta se acelera la expansión del universo?

**Solución:** tenemos

$$\ddot{a}(t) = \left( \frac{2}{3(1+\omega)} \right) \left( \frac{2}{3(1+\omega)} - 1 \right) \cdot a \cdot t^{-2}.$$

Un universo en expansión significa  $a(t) > 0$  (o, de forma equivalente,  $C > 0$ ), y así el punto de inflexión para la expansión acelerada es la condición

$$\frac{2}{3(1+\omega)} - 1 = 0 \quad \implies \quad \omega = -\frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, obtenemos una expansión acelerada para  $\omega < -\frac{1}{3}$  y expansión desacelerada para  $\omega > -\frac{1}{3}$ .

## 26.23 Diagramas

### 26.23.1 Diagrama de Penrose De Un Universo Lleno De Radiación

**Pregunta:** Hallar una ecuación diferencial para las geodésicas radiales nulas en un universo espacialmente plano FRW (Friedmann, Robertson-Walker) lleno de radiación, utilizando el gráfico  $(t, r, \vartheta, \phi)$  visto en las clases. Escribir explícitamente el rango preciso de las variables del gráfico.

**Solución:** Un universo FRW espacialmente plano tiene  $\kappa = 0$  y una métrica con componentes

$$g_{ab}(t, r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}_{ab},$$

en la carta dada. Si consideramos un universo lleno de radiación, tenemos  $\omega = -\frac{1}{3}$ , y del último tutorial tenemos

$$a(t) = C \cdot t^{1/2}.$$

Las geodésicas radialmente nulas tienen  $\dot{\vartheta} = 0 = \dot{\phi}$ , por lo que nuestro Lagrangiano se expresa como

$$0 = -\dot{t}^2 + a^2 \cdot \dot{r}^2,$$

el cual, sustituyendo en nuestra expresión  $a(t)$  y utilizando la regla de la cadena hacia atrás, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dt}{dr} = \pm C\sqrt{t}.$$

Hemos visto que en el universo FRW hay un tiempo inicial (el Big Bang), por lo que nuestra coordenada  $t$  debe estar acotada a la baja. Podemos elegir parametrizarla de forma que  $t = 0$  sea el valor del Big Bang, lo que nos da los rangos de coordenadas

$$t \in (0, \infty), \quad r \in (0, \infty), \quad \vartheta \in (0, \pi), \quad \text{y} \quad \phi \in (0, 2\pi),$$

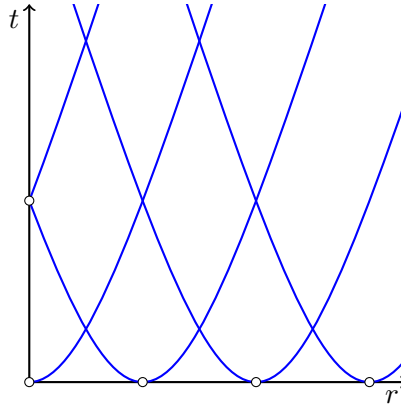
donde el punto 0 es sacado del rango de  $t$ 's ya que no es realmente un punto en nuestro espaciotiempo (es una singularidad).

**Pregunta:** Determinar la coordenada- $t$  de una geodésica en función de la coordenada  $r$ . Dibujar algunas de las geodésicas nulas en el gráfico subyacente.

**Solución:** Resolviendo la ecuación diferencial de la pregunta anterior obtenemos

$$t_{\pm}(r) = \frac{1}{4}(A \pm Cr)^2,$$

para alguna constante de integración  $A$ . Así pues, tenemos una serie de curvas cuadráticas, desplazadas para diferentes valores de  $A$ .



Los círculos blancos indican que estos puntos no forman parte de nuestro diagrama ya que  $t$  y  $r$  no pueden tomar el valor 0. Como estas partes no están incluidas, las líneas a cada lado representan en realidad dos geodésicas separadas, tal como vimos con los dibujos de Schwarzschild en las clases.

**Pregunta:** Hallar una carta en la que las geodésicas sean rectas de pendiente constante  $\pm 1$ . Determinar el rango de las coordenadas.

**Solución:** Podemos reordenar la expresión para  $t_{\pm}$  en función de  $r$  para dar

$$r = \pm \frac{2}{C} \sqrt{t_+} - \frac{A}{C}, \quad r = \mp \frac{2}{C} \sqrt{t_-} + \frac{A}{C}.$$

Si entonces definimos

$$\bar{t}_{\pm} := \frac{2}{C} \sqrt{t_{\pm}},$$

obtenemos

$$r = \pm \bar{t}_+ - B, \quad r = \mp \bar{t}_- + B,$$

donde  $B = \frac{A}{C}$ . Todos estos gráficos son simplemente líneas de pendiente constante  $\pm 1$ . Pensando un poco, está claro que podemos considerar o bien  $\bar{t}_+$  o bien  $\bar{t}_-$  y obtener los otros resultados utilizando diferentes valores de  $B$ . Así que escribiremos simplemente

$$r_{\pm} = \pm \bar{t} - B.$$

Los rangos son

$$\bar{t} \in (0, \infty), \quad r \in (0, \infty), \quad \vartheta \in (0, \pi), \quad \text{y} \quad \phi \in (0, 2\pi),$$

**Pregunta:** Elegir las llamadas coordenadas nulas  $u$  y  $v$  en las que las geodésicas nulas de pendiente positiva son paralelas al eje  $u$  y las de pendiente negativa son paralelas al eje  $v$ . Determinar el rango de las coordenadas.

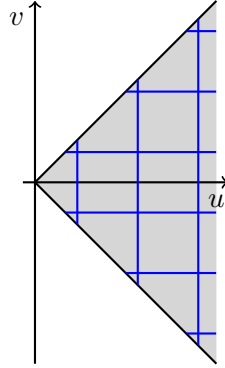
**Solución:** Definimos

$$u := \bar{t} + \bar{r}, \quad \text{y} \quad v := \bar{t} - \bar{r},$$

y sus rangos son

$$u \in (0, \infty), \quad \text{y} \quad v \in (-\infty, \infty).$$

Tenemos entonces las condiciones  $u + v = 2\bar{t} > 0$  y  $u - v = 2\bar{r} > 0$ , por lo que necesitamos excluir las regiones  $u < 0$ ,  $v + u < 0$  y  $u - v < 0$  de nuestro diagrama. Por lo tanto obtenemos



donde la zona sombreada es la única que consideramos.

Las líneas azules son las geodésicas en este gráfico. Nótese que al ir a este gráfico podemos compactar sin arruinar la naturaleza de 90 grados de la estructura del cono. Esta es exactamente la razón por la que se incluye este paso, y es lo que se refiere Observación 23.1.1.

**Pregunta:** Compactar, es decir, reescalar a rangos finitos, cada una de las dos coordenadas nulas mediante una transformación adecuada. Determinar el rango de las coordenadas.

**Solución:** Definimos

$$p := \arctan(u), \quad \text{y} \quad q := \arctan(v),$$



que tiene los rangos

$$p \in (0, \pi/2), \quad y \quad q \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Nuestras otras condiciones de rango siguen siendo válidas, a saber  $p + q > 0$  y  $p - q > 0$ .

Nuestro gráfico tiene el mismo aspecto que en la pregunta anterior, salvo que ahora el borde derecho está acotado en el valor  $p = \pi/2$ .

**Pregunta:** Por transformación final, recuperar la noción de coordenadas temporales y radiales. Determinar los rangos de dichas coordenadas. Dibujar el diagrama de Penrose-Carter.

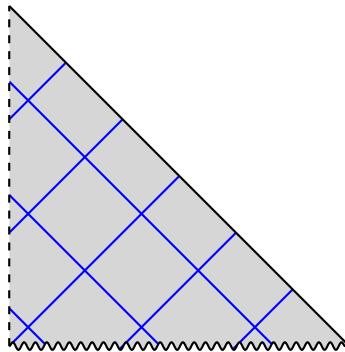
**Solución:** Definimos

$$T := p + q, \quad y \quad R := p - q,$$

cuyos rangos son

$$T \in (0, \pi), \quad y \quad R \in (0, \pi).$$

Tenemos la restricción adicional  $T + R = 2U < \pi$ , por lo que nuestro diagrama Penrose-Carter se ve como



Hemos utilizado la línea en forma de serpiente para indicar la singularidad del Big Bang, y una línea discontinua en el lado izquierdo para recordarnos que no hay nada incorrecto aquí (es decir, las líneas que se desvían hacia la izquierda simplemente vuelven a formar la línea discontinua — piensen en girar el diagrama reintegrando  $\phi$ ).

## 26.24 Teoría de la Perturbación

Aparecerá más tarde.

# Textos Útiles & Lectura Adicional

## RELATIVIDAD GENERAL

- R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.
- L. Ryder, *Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press, 2009.
- M. P. Hobson, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, 2006.
- W. Rindler, *Relativity: Special, General and Cosmological*, Oxford University Press, 2006.
- S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, Inc., 1972.

## GEOMETRÍA DIFERENCIAL

- P. Renteln, *Manifolds, Tensors, and Forms: An Introduction for Mathematicians and Physicists*, Cambridge University Press, 2014.
- L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds* (Second addition), Springer, 2011.